

МІНІСТРЕСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка



VIII Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ

Матеріали конференції

До 100-річчя з дня народження
академіка АН ВШ України, заслуженого професора університету
ГОРОШКА Олега Олександровича

До 90-річчя з дня народження
члена-кореспондента НАН України, заслуженого професора університету
УЛІТКА Андрія Феофановича

Київ, Україна
28–29 серпня 2025

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ:

- Грінченко В.Т.*, академік НАН України,
- Кушнір Р.М.*, академік НАН України, директор ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
- Тимоха О.М.*, академік НАН України, директор Інституту математики НАН України,
- Кубенко В.Д.*, академік НАН України, заступник директора Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
- Григоренко О.Я.*, академік НАН України, зав. відділу Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
- Токовий Ю.В.*, член-кор. НАН України, заст.директора ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
- Altenbach H.*, Professor, Institute of Mechanic (IFME), Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Germany,
- Fallah A. S.*, Professor, Oslo Metropolitan University, Norway
- Guz, I.A.*, Professor, Heriot-Watt University, Scotland, UK
- Kashtalyan M.Yu.*, Professor, University of Aberdeen, Scotland, UK,
- Muller W.*, Professor, Technical University of Berlin, Germany,
- Katica (Stevanović) Hedrih*, Professor, academician of Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts (SANU), Serbia,
- Жук Я.О.*, член-кор. НАН України, зав. кафедри Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,
- Vaysfeld N.D.*, Senior Lecturer in Analysis, Doctor of Science, King's College, London, UK,
- Лобода В.В.*, зав.кафедри Дніпровського національного університету ім. О. Гончара,
- Дзюба А.П.*, професор кафедри теоретичної і комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету ім. О. Гончара,
- Кізілова Н.М.*, професор Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна,
- Маціпура В.Т.*, професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,
- Зражевський Г.М.*, доцент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,
- Олійник В.Н.*, ст. наук. співроб. Інституту гідромеханіки НАН України,
- Попов В.Г.*, зав. кафедри Одеської національної морської академії,
- Сенченков І.К.*, головний наук. співр. Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
- Лебедєва І. В.*, доцент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.

СКЛАД
ОРГАНІЗАЦІЙНОГО КОМІТЕТУ

VIII Міжнародної наукової конференції
Сучасні проблеми механіки (МРМ)
(28-29 серпня 2025 р.)

Голова оргкомітету	– Толстанова Ганна Миколаївна, професор, проректор з наукової роботи
Співголова оргкомітету	– Безущак Оксана Омелянівна, професор, декан механіко-математичного факультету
Члени оргкомітету:	– Жук Ярослав Олександрович, професор, зав.кафедри теоретичної та прикладної механіки, – Маципура Володимир Тимофійович, професор, – Зражевський Григорій Михайлович, доцент, – Лебедєва Ірина Валеріївна, доцент, – Улітко Ігор Андрійович, доцент, – Борисейко Олександр Віталійович, доцент, – Харитонов Олексій Михайлович, доцент, – Куценко Олексій Григорович, доцент, – Курилко Олександр Борисович, асистент, – Троценко Ярослав Павлович, асистент, – Клімчук Тарас Володимирович, асистент, – Яковенко Катерина Іванівна, пров.інженер, – Пучко Наталія Петрівна, пров.математик.

Відповідальний секретар оргкомітету

Жук Ярослав Олександрович, зав.кафедри теоретичної та прикладної механіки, р.(044)259-03-07, м. (097)490-11-89

Секретарі оргкомітету

Яковенко Катерина Іванівна, пров.інж., р.(044)521-35-99 , м.(067)502-99-99
Пучко Наталія Петрівна, інж., р.(044)521-35-99, м.(067)683-45-34

З М І С Т

<i>Вайсфельд Н.Д.</i> Новий підхід до розв'язання задач поропружності з некласичними умовами контакту	8
<i>Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю.</i> Осесиметрична задача поропружності для шаруватого циліндру	9
<i>Вайсфельд Н.Д., Мішуріс Г., Процеров Ю.С., Журавльова З.Ю.</i> Задача теплопровідності для складеного циліндру з неідеальними умовами контакту між його шарами	10
<i>Васін П.О., Гуржій Р.О., Черній Д.І.</i> Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики	11
<i>Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борейко Н.П.</i> Чисельний аналіз вільних коливань трикутної пластини з різним положенням отвору	12
<i>Грінченко В.Т., Маціпура В.Т.</i> Загальний розв'язок граничних задач. Змішані граничні умови	13
<i>Грінченко В.Т., Маціпура В.Т., Лебедева І.В., Трифонов Т.</i> Вплив згладжування поверхні скінченного клиноподібного об'єкта на характеристики розсіювання плоскої хвилі	14
<i>Glukhov A. Yu.</i> On the interaction of composite material layers with initial stresses during torsion	15
<i>Glukhov Yu. P.</i> Multilayer strip on a rigid base under moving load	16
<i>Довжик М.В., Назаренко В.М.</i> Плоска задача руйнування матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича при стиску вздовж приповерхневої тріщини	17
<i>Дудик М., Камінський А.О., Чорноіван Ю.О.</i> Аналітичне моделювання зон передруйнування в матеріалах композиційного з'єднання з квазікрихким механізмом руйнування	18
<i>Жук О.П., Жук Я.О., Kashtalyan M.</i> Дія сил акустичного випромінення в ідеальній рідині на в'язку краплю	19
<i>Zhuk Y.A., Melnichenko M.M., Fallah A.S.</i> Technology for laser thermoforming of thin-walled metal structural elements	20
<i>Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф., Stan Uryasev</i> Застосування DNN для класифікації ергодичних та хаотичних траєкторій системи Генона-Хейліса	21
<i>Кагадій Т.С., Говоруха В.Б., Шпорта А.Г., Онопрієнко О.Д.</i> Дослідження напружено-деформованого стану композиту з дископодібною тріщиною	22
<i>Калиняк Б.М.</i> Температурні поля, які спричиняють цільовий розподіл термонапружень у неоднорідних циліндричних тілах	23
<i>Камінський А.О., Дудик М.В., Чорноіван Ю.О.</i> Вплив Т-напружень на поворот міжфазної тріщини	24
<i>Камінський А.О., Курчаков Є.Є., Чорноіван Ю.О.</i> Моделювання крайових явищ в ортотропному середовищі з тріщиною	25
<i>Кізілова Н.М.</i> Біоміметичні поверхні як оптимальні біомеханічні системи	26
<i>Коломійчук О.П.</i> Побудова керування Луїнбергера для гіроскопічної системи	27
<i>Комаров О.В., Гергель І.Ю., Лобода В.В.</i> Рухома міжфазна тріщина в	28

біматеріальному п'єзоелектричному квазікристалічному просторі	
<i>Константинов О.В.</i> Стабілізація періодичних рухів механічної системи «резервуар - рідина з вільною поверхнею»	29
<i>Коваленко Є.О., Чернецький С.О., Лобода В.В.</i> Врахування історії навантаження у пружно-пластичному двохаровому тілі при складних умовах контакту	30
<i>Краснопольська Т.С.</i> Динаміка хрестоподібних хвиль у прямокутних басейнах скінчених розмірів	31
<i>Кузьменко В.В., Троценко Я.П.</i> Моделювання поширення звуку у плоскому хвилеводі з округлими вигинами	32
<i>Куценко О.Г., Харитонов Л.В., Куценко А.Г.</i> Дослідження взаємодії армуючого стрижня з матрицею	33
<i>Лавренюк М.В., Лавренюк Я.В.</i> Про деякі аспекти застосування фізично-поінформованих нейромереж до розв'язання крайових задач механіки суцільних середовищ	34
<i>Ловейкін А.В.</i> Контакт жорсткого клиноподібного штампу з пружним півпростором при повному зчепленні	35
<i>Лубков М.В.</i> Моделювання зсуву в несиметричних антиклінальних геоструктурах	36
<i>Лимарченко О.С., Ковальчук О.П.</i> Інтелектуальне моделювання поведінки трубопровідних систем у динамічному потоці рідини	37
<i>Мазко О.Г.</i> Еквівалентне перетворення дескрипторних систем керування з екзогенними збуреннями	38
<i>Майко І.В., Кізілова Н.М.</i> Підходи «великих даних» для моделювання переносу забруднень	39
<i>Маковійчук М.В., Даляк Т.М.</i> Гранична рівновага пологої циліндричної оболонки з поздовжніми тріщиною та щілиною	40
<i>Maksymyuk V.A., Ushakova V.S., Ushakov O.V.</i> On the phenomenon of supercavitation in a water bullet trap	41
<i>Мельниченко М.М., Жук Я.О., Рево С.Л.</i> Мікротвердість сталі після карбохромовання	42
<i>Мельниченко М.М., Жук Я.О., Яровой Л.К., Пучко Н.П., Водотовка М.А.</i> Методика експериментального моделювання проникнення високошвидкісних ударних елементів у бронематеріалах	43
<i>Miliaiev A., Timokha A.</i> Machine learning approach for studying damped resonant sloshing	44
<i>Müller Wolfgang, Schek Luca N., Vilchevskaya Elena N.</i> 4d-printed liquid crystal elastomers - a computational analysis of their deformation behavior of under change of temperature	45
<i>Новицький Ві.Ві.</i> Аналітична модель тиску в судині на основі пружної моделі Франка за умов змінної еластичності стінки	46
<i>Олійник В.Н.</i> Акустопружні коливання системи «повітря – циліндрична оболонка – повітря» при збудженні плоскою моногармонічною хвилею	47
<i>Онишкевич В.М., Барабаш Г.М.</i> Квазістатична контактна взаємодія скінченного жорсткого циліндра, що обертається, та пружного півпростору при фрикційному	48

теплоутворенні

<i>Petrashchuk V. M., Shatskyi I. P.</i> Bending of a transversely inhomogeneous plate with collinear contact cracks	49
<i>Попов В.Г., Кирилова О.І.</i> Взаємодія динамічно завантажених жорстких включень в пружному тілі	50
<i>Ревенко В.П.</i> Умови відсутності температурних напружень в пластині за дії двовимірного температурного поля	51
<i>Ричак Т.Л., Кізілова Н.М., Ричак Н.Л.</i> Моделювання тепломасопереносу у системі зв'язаних водних резервуарів на прикладі Бурштинської ТЕЦ	52
<i>Руцицький Я.Я., Юрчук В.М.</i> Новий хвильовий ефект, який супроводжує класичний ефект генерації другої гармоніки	53
<i>Samoilenko O.</i> Mathematical problems of feature matching for vision-guided mechanical system with limited resources	54
<i>Савельєва К.В., Дашко О.Г.</i> Визначення зведених коефіцієнтів Пуассона для тришарової панелі	55
<i>Селіванов М.Ф.</i> Оцінка впливу концентраторів напружень та тріщин на довготривале руйнування в'язкопружних елементів конструкцій	56
<i>Сенченков І.К., Червінко О.П., Доля О.В.</i> Залишковий напружено-деформований стан порожнистого циліндра при нарощуванні рідким металом	57
<i>Сенченков І.К., Червінко О.П., Якименко С.М.</i> Коливання і дисипативний розігрів твердопаливного ракетного двигуна при дії радіального силового гармонічного навантаження	58
<i>Середницька Х.І.</i> Моделювання термопружної поведінки біматеріалу з міжфазною теплопровідною закритою тріщиною	59
<i>Сохацький А.В., Дреус А.Ю.</i> До питання математичного моделювання турбулентних течій	60
<i>Стеблянко П.О.</i> Розв'язання стаціонарних задач теорії термопластичності для функціонально неоднорідних пластин та оболонок	61
<i>Сторожук Є.А., Серафимович Р.В., Чернишенко І.С.</i> Розрахунок за межею пружності концентрації напружень в тришаровій циліндричній оболонці з круговим отвором	62
<i>Timokha A.</i> Reduced order modelling concept in surface wave problems	63
<i>Токовий Ю. В., Кульчицький-Жигайло Ю. Р.</i> Аналіз термопружної поведінки багатошарових сферичних тіл	64
<i>Трач В.М., Хоружий М.М.</i> Нетонкі анізотропні циліндричні оболонки з шаром функціонально-градієнтного матеріалу під боковим тиском	65
<i>Трач В.М., Подворний А.В., Жукова Н.Б.</i> Напружено-деформований стан анізотропних товстостінних циліндричних оболонок під змінним навантаженням	66
<i>Улітко І.А., Борисейко О.В., Лебедева І.В., Курилко О.Б.</i> Резонансні властивості п'єзоелектричного гіроскопічного сенсора на об'ємних хвилях зсуву	67
<i>Ushakova V.S., Ushakov O.V</i> Mathematical processing of experimental data in viscoelasticity problems	68
<i>Фесенко Г.О., Процеров Ю.С.</i> Усталені коливання пружного півпростору з	69

циліндричним жорстким включенням

<i>Ханко Б.С.</i> Нестійкість контакту рухомих тіл за фрикційного тепловиділення з урахуванням їх поверхневої теплопровідності	70
<i>Харитонов О.М., Куценко О.Г., Куценко А.Г.</i> Аналіз ефективності комбінування участі двигунів великої та малої тяги при перельотах Земля-Марс	71
<i>Katica R. (Stevanović) Hedrih.</i> New class of rheologic complex models of materials fractional type with piezoelectric properties and a class of rheologic discrete dynamics system oscillator type or creeper type	72
<i>Shamrai M.</i> Control error bound for pruned neural controllers	74
<i>Шукула О.М., Жукова Н.Б., Вишинівський В.В., Білоусова С.В.</i> Модель деформування армованих в площині волокнистих матеріалів з фізично нелінійною матрицею	75
<i>Юзв'як М. Й., Токовий Ю. В.</i> Функції Вігака в просторових задачах теорії пружності та термopружності	76
<i>Яковенко Н.Д., Доля О.В.</i> Чисельне моделювання термомеханічного та мікроструктурного станів півпростору за умов імпульсного навантаження	77
<i>Янчевський І.В., Гетьман Т.В.</i> Розв'язання задач ідентифікації квазістатичних навантажень у програмному комплексі, що реалізує метод скінченних елементів	78
<i>Янчевський І.В., Остос О.Х., Кришталь В.Ф.</i> Гармонічні коливання сферичного сегмента в напівнескінченній циліндричній порожнині з ідеальною стисливою рідиною	79
<i>Яровой Л.К., Мельниченко М.М., Степахно І.В.</i> Комплексне дослідження згинних коливань та поверхневих хвиль в одновимірних пружних об'єктах засобами трьоххвильової лазерної віброметрії	80

Вайсфельд Наталя Данилівна, доктор фіз.-мат. наук, професор,
King's College London, London, UK,
 e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

НОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПОРОПРУЖНОСТІ З НЕКЛАСИЧНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ

Вайсфельд Н.Д.

У доповіді представлено новий підхід до розв'язання задач поропружності з неklasичними умовами контакту на міжфазних поверхнях, який базується на поєднанні фізично обґрунтованих моделей і строгої математичної аналітики. Класична теорія поропружності, сформульована Морісом А. Біо в 1940-х роках, заклала фундаментальну основу для опису взаємодії рідини та твердого скелета у насичених пористих середовищах. Подальші внески Терцагі, Гуртіна, Боуена, Рудницького та інших розширили цю теорію на складніші матеріали та граничні умови. Упродовж останніх десятиліть теорія активно розвивалась і застосовувалась до широкого кола інженерних і геофізичних задач такими науковцями як Герберт Ванг, Джон Т. Райс, Йорам Рубін, Мартін Дж. Блант, Люк Дорм'є та Себастьян Бурже, які вирішували проблеми неоднорідності, багатофазного потоку та стохастичних ефектів у пористих матеріалах.

У практичних застосуваннях — особливо в геомеханіці, біомеханіці та екологічній інженерії — поропружні середовища часто містять тріщини, дефекти та неідеальні контакти, які суттєво впливають на взаємодію рідина–тверде тіло. Традиційні моделі, що передбачають ідеальні умови на межах розділу, виявляються недостатніми для відтворення таких складностей.

Вагомий внесок у цю сферу зробив проф. Г. Мішуріс, який розробив асимптотичні та міжфазні моделі, що дозволяють замінити тонкі або податливі шари ефективними умовами передавання, допускаючи розриви в переміщеннях, напруженнях і потоках. Ці підходи підвищують як обчислювальну ефективність, так і фізичну достовірність моделей. Додаткові внески проф. О. Мовчана, проф. В.Єрофєєва та проф. А. Березовського ще більше поглибили розуміння поропружності в дефектних і нелінійних середовищах.

Більшість існуючих моделей не було побудовано в рамках строгої теорії крайових задач (boundary value problems — BVP), внаслідок чого питання існування, єдиності та регулярності розв'язків залишалися або відкритими, або розглядалися лише числовими перевірками. Водночас апарат BVP має низку важливих переваг: він дозволяє строго аналізувати особливості розв'язку поблизу меж і кутів, забезпечує математично коректне формулювання неідеальних умов, а також підтримує потужні аналітичні методи — варіаційні формулювання, інтегральні рівняння та спектральний аналіз. Роботи проф. Г. Попова в галузі математичних методів розв'язання мішаних задач поропружності забезпечують необхідну строгість для аналітичного розгляду таких задач, особливо в областях зі складною геометрією або неоднорідними межами.

Враховуючи це, наша наукова група – у складі З. Журавльової, Д. Пека, Ю. Процєрова та І. Істеніса – запропонувала застосування методів BVP, розроблених проф. Г. Поповим до задач поропружності, поєднавши їх з моделями міжфазних умов проф. Г. Мішуріса. Було розроблено математичний підхід для розв'язання задач поропружності та теплопровідності з неідеальними умовами контакту. Цей підхід не лише підвищує математичну строгість, але й створює основу для моделювання складних термо-поропружних процесів, де деформація, теплоперенос і фільтрація взаємопов'язані у просторі й часі. Розроблена методика дозволяє формулювати задачі, що змінюються в часі, та тривимірні задачі, необхідні для моделювання в реальних умовах — у геологічних структурах, композитних матеріалах і біологічних тканинах. Запропонований підхід відкриває шлях до системного математичного аналізу складних мультифізичних процесів, що сприяє новим досягненням як у теорії, так і в прикладних дослідженнях.

Вайсфельд Наталя Данилівна, доктор фіз.-мат. наук, професор,
King's College London, London, UK,

e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

Журавльова Зінаїда Юріївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРУ

Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю.

Розглядається скінченний суцільний поропружний циліндр $0 < r < 1, 0 < z < h - \pi < \varphi < \pi$, що складається з N шарів $a_{i-1} < r < a_i, i = \overline{1, N}, a_0 = 0, a_N = 1$. Між шарами виконуються умови ідеального контакту [1]

$$\begin{aligned} u_l|_{r=a_l-0} &= u_{l+1}|_{r=a_l+0}, w_l|_{r=a_l-0} = w_{l+1}|_{r=a_l+0}, p_l|_{r=a_l-0} = p_{l+1}|_{r=a_l+0}, \\ \sigma_r^l|_{r=a_l-0} &= \sigma_r^{l+1}|_{r=a_l+0}, \tau_{rz}^l|_{r=a_l-0} = \tau_{rz}^{l+1}|_{r=a_l+0}, k_l \frac{\partial p_l}{\partial r}|_{r=a_l-0} = k_{l+1} \frac{\partial p_{l+1}}{\partial r}|_{r=a_l+0}, l = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (1)$$

де $u_l(r, z), w_l(r, z)$ це безрозмірні переміщення l -го шару твердого каркасу відносно осей r, z відповідно, $p_l(r, z)$ - безрозмірний тиск рідини l -го шару, $\sigma_r^l(r, z), \tau_{rz}^l(r, z)$ - безрозмірні нормальне та дотичне напруження l -го шару відповідно.

На циліндричну поверхню $r = 1$ діє навантаження

$$\sigma_r^N|_{r=1} = -L(z) - \alpha_N P(z), \tau_{rz}^N|_{r=1} = T(z), p_N|_{r=1} = P(z) \quad (2)$$

де $L(z), T(z), P(z)$ - відомі функції, α_l - коефіцієнт Біо l -го шару.

Торці $z = 0, z = h$ знаходяться в умовах гладкого контакту та є непроникними

$$w_l|_{z=0,h} = 0, \tau_{rz}^l|_{z=0,h} = 0, \frac{\partial p_l}{\partial z}|_{z=0,h} = 0, \quad (3)$$

Потрібно визначити переміщення, напруження та тиск рідини, що задовольняють крайові умови (2)-(3), умови сполучення (1) та рівняння [2].

Вихідну задачу зведено до одновимірної за допомогою скінченного синус, косинус перетворення Фур'є за змінною z . Отриману одновимірну крайову задачу записано у векторному вигляді. Її розв'язок знайдено за допомогою апарату матричного диференціального числення [3] та рекурентних співвідношень [3]. В результаті було знайдено аналітичні вирази для переміщень, напружень та тиску рідини всередині кожного шару циліндру.

Acknowledgments. The research is supported by European project funded by Horizon 2020 Framework Programme for Research and Innovation (2014-2020) (H2020-MSCA-RISE-2020) Grant Agreement number 101008140 EffectFact "Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications", Natalya Vaysfeld is thankful for support from Royal Society Wolfson Visiting Fellowship R3/233003.

1. Cheng A. H.-D. Poroelasticity. Theory and applications of transport in porous media. Springer. – 2016. – Vol. 27.

2. Verruijt A. An introduction to soil dynamics. Theory and applications of transport in porous media. Springer. – 2010.

3. Попов Г. Я. Точні розв'язки деяких крайових задач механіки деформованого твердого тіла. – Одеса: Астропринт, 2013. – 424 с.

Вайсфельд Наталя, д. ф-м н., проф. *Кінгс Коледж Лондон, Лондон, S2.35, Сполучене Королівство*,
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

Мішуріс Генадій, д. ф-м н., проф. *університет Аберістуїта, Аберістуїт, SY23 3BZ, Сполучене Королівство*, e-mail: ggm@aber.ac.uk

Процеров Юрій¹, к. ф-м н., доц.
e-mail: protserov@onu.edu.ua

Журавльова Зінаїда¹, к. ф-м н., доц.
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

¹ *Одеський національний університет Мечникова, 65082, Одеса, Україна.*

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРУ З НЕІДЕАЛЬНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ МІЖ ЙОГО ШАРАМИ

Розглянуто осесиметричну задачу теплопровідності для циліндра, який складається з трьох шарів: $\Omega_1: 0 \leq r < R, -H_1 < z < -h/2$, $\Omega_0: 0 \leq r < R, -h/2 < z < h/2$, $\Omega_2: 0 \leq r < R, h/2 < z < H_2$, де $h \ll H_1, H_2$ є товщина міжфазного включення (задачу поставлено у циліндричній системі координат). Температури та коефіцієнти теплопровідності в областях $\Omega_j, j = 0, 1, 2$ позначено як u_j, k_j відповідно. Функції $u_j, j = 0, 1, 2$ мають задовольняти рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} = 0, \quad r, z \in \Omega_j$$

Граничні умови, не обмежуючі загальності міркувань, вважаються такими: циліндрична поверхня $r = R$ циліндра та його нижня основа $z = -H_1$ є теплоізолювані, на верхній поверхні $z = H_2$ задано температуру. Метою даної роботи є отримання та подальше дослідження важливих для застосування на практиці умов контакту шарів, де враховано співвідношення порядку величин їх коефіцієнтів теплопровідності. Для цього застосовано метод малого параметру, за яким введено нову змінну $\zeta = z\varepsilon^{-1}$, ε є позитивна мала величина. В області Ω_0 розглянуто рівняння теплопровідності відносно функції u_0 та здійснено аналіз порядків його членів відносно нової змінної. Як результат, отримано три умови спряження в залежності від порядків співвідношення коефіцієнтів теплопровідності шарів циліндра:

1) Коефіцієнт теплопровідності k_0 має порядок, що дорівнює порядкам коефіцієнтів k_1, k_2 . Доведено, що для цього випадку виконуються умови ідеального теплового контакту.

2) Коефіцієнт k_0 має порядок набагато менший ніж порядки коефіцієнтів k_1, k_2 , тобто $k_0 = \varepsilon k$, де k має порядок такий як величини k_1, k_2 . Для такого співвідношення величин коефіцієнтів теплопровідності отримано умови спряження

$$u_2|_{z=h/2} - u_1|_{z=-h/2} = \frac{k_1 h}{k_0} \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-h/2}, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=h/2}$$

3) Коефіцієнт k_0 має порядок набагато більший ніж порядок коефіцієнтів k_1, k_2 , тобто $k_0 = \varepsilon^{-1} k$. В цьому випадку виведено

$$u_1|_{z=-h/2} = u_2|_{z=h/2}, \quad k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=h/2} - k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = -k_0 h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \Big|_{z=-h/2}$$

Дослідження підтримано європейським проектом, що фінансується Рамковою програмою з досліджень та інновацій Горизонт 2020 (2014-2020) (H2020-MSCA-RISE-2020) Грантова угода № 101008140 EffectFast «Ефективні методи факторизації для матричних функцій: Розвиток теорії, чисельних методів і ефективних застосувань», Наталя Вайсфельд є вдячною гранту Вольфсона Королівського товариства R3/233003.

Васін Павло Олексійович, асистент, факультет комп'ютерних наук та кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: vasinpavlo@gmail.com

Гуржій Роман Олександрович, аспірант,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору, НАН України, Київ, Україна
e-mail: gourjii@gmail.com

Черній Дмитро Іванович, доктор технічних наук, доцент, факультет комп'ютерних наук та кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: D.Cherniy@ukr.net;

МЕТОД ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Васін П.О., Гуржій Р.О., Черній Д.І.

Виявлення нових фізичних або механічних ефектів та явищ потребує проведення фізичного або обчислювального експерименту, які базуються на технологіях проведення досліджень. Але експериментальні дослідження мають дуже велику вартість, тому доступним та ефективним методом досліджень є методи системного обчислювального експерименту.

Робота присвячена побудові моделей для прикладних задач аерогідродинаміки. Для вирішення вищезазначених завдань представлені підходи, що дозволяють зводити плоскі та просторові крайові задачі Неймана і Діріхле для рівнянь Лапласа і Гельмгольца до сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь, причому, як для внутрішніх і зовнішніх задач в області із замкненими межами, так і для задач в області поза розімкненою межею. У роботі представлені чисельні схеми та обчислювальні технології, які базуються на методі дискретних особливостей для наближеного вирішення поставлених початкова-крайових задач. Представлено результати чисельного моделювання фізичних явищ та аерогідродинамічних процесів. На основі отриманих нових теоретичних результатів розроблено методи чисельного вирішення ряду задач аеродинаміки про обтікання тіл за наявності інжекції зовнішнього потоку струменем.

Представлено порівняльний аналіз результатів математичного моделювання з даними натурного і лабораторного експерименту.

1. S.O.Dovgiy S.I.Lyashko, D.I.Cherniy. Algorithms of Discrete Singularities Method of Computational Technologies. // Cybernetics and System Analysis, 2017, №6, pp.147-159.
2. S.A.Dovgiy, I.K.Lifanov, D.I.Cherniy The method of singular integral equations and computational technologies. – Kyiv:"Yuston" (2016).
3. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies.// XXXVIII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023). Page 28.
http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2023/PDMU-2023_End.pdf
4. Васин П.А., Черний Д.И. Моделирование трехмерной вихревой структуры. // Компьютерная математика. – Київ, Інститут кібернетики НАНУ, 2018, №1, с. 9-16.
5. Довгий С.А. Аэрогидродинамика движущихся крыльев.- Kyiv:"Yuston" (2016), 276р.
6. Черній Д.І., Васін П.О., Пилипченко І.Ю. Математичні моделі відривних течій. //Тези VII Міжнародна наукова конференція СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ. (160-річчя кафедри механіки КНУ), Київ, Україна 30–31 Серпня 2023. (page 67).
http://lcwf.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2_023_UKR.pdf.

Григоренко Олександр Ярославович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com;
 Борисенко Максим Юрійович, к.ф.-м.н, ст. дослідник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: mechanics530@gmail.com;
 Бойчук Олена Володимирівна, к.ф.-м.н, доц.,
Миколаївський Національний аграрний університет, Миколаїв, Україна,
 e-mail: boychuklena27@gmail.com;
 Борейко Наталія Петрівна, к.ф.-м.н, ст. дослідник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: nataliya.petrivna@ukr.net.

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТРИКУТНОЇ ПЛАСТИНИ З РІЗНИМ ПОЛОЖЕННЯМ ОТВОРУ

Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борейко Н.П.

Проектування будівель та корпусів транспортних апаратів, а також інших конструкцій спеціального призначення потребує попереднього визначення частот вільних коливань, оскільки в реальних умовах експлуатації необхідно уникати резонансу, який може спричинити руйнування. Значна кількість корпусів даних конструкцій або їх конструктивні елементи є комбінацією пластин, які мають різну конструктивну неоднорідність, наприклад, складну геометрію, змінну товщину, технологічні отвори та інше. Теоретичне визначення частот і форм вільних коливань пов'язане із значними труднощами різного характеру. В сучасній науці та інженерії ця проблема вирішується за допомогою використання різних систем автоматизованого проектування, робота яких базується на застосуванні методу скінченних елементів. Наприклад, програмний комплекс FEMAP широко використовується при розрахунках частот і форм вільних коливань пластин і оболонок з конструктивною неоднорідністю. Так, в [1] розраховуються динамічні характеристики багатокутної пластини різної товщини, в [2] – рівносторонньої трикутної пластини з центральним отвором, а в [3-4] – циліндричних оболонок різних некругових поперечних перерізів. Виходячи з цього, актуальним завданням механіки та прикладної математики є поширення чисельних методів на вирішення задач динаміки пластин з конструктивною неоднорідністю.

Метою даного дослідження є визначення частот і форм вільних коливань трикутної пластини з вільними краями та жорстко закріпленим отвором, а також встановлення залежності динамічних характеристик пластини від положення круглого отвору.

1. Grigorenko A., Borysenko M., Boychuk O., Boreiko N. Numerical Analysis of Free Vibration Frequencies of Hexagonal Plate. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A.Y., Kushnir R.M., Nazarenko V.M., Eremeyev V.A. (eds) Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials, vol 204. Springer, Cham. 201-220 (2024).
2. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. Int. Appl. Mech. **57** (5), 534-542 (2021).
3. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **56** (4), 389-401 (2020).
4. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P. Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells. In: Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V., Mikhasev G., Morozov N. (eds) Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials, vol 151. Springer, Cham. 63-74 (2021).

Грінченко Віктор Тимофійович, доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАНУ,
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: grinchenko@nas.gov.ua;
 Маципура Володимир Тимофійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: mnivtt@knu.ua

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ. ЗМІШАНІ ГРАНИЧНІ УМОВИ

Грінченко В.Т., Маципура В.Т.

Розвиток обчислювальної техніки виявив великий вплив на формування нових методів у математичній фізиці. Про це свідчить поява обчислювальних розділів у різних галузях знань таких, наприклад, як “Обчислювальна гідромеханіка”, “Комп’ютерна біологія”, “Комп’ютерна фізика” та інші. Одним із цікавих результатів цього процесу розробки нових методів є розуміння того, що орієнтація тільки на збільшення продуктивності ЕОМ є не виправданою. При цьому задача наступного аналізу і узагальнення результатів виявляється надто складною [1].

Зазначена обставина, мабуть, є основним стимулом до розвитку різного типу чисельно-аналітичних методів у математичній фізиці. Мова йде про попередню аналітичну роботу при дослідженні граничної задачі, яка дозволяє зменшити розмірність задачі, взяти до уваги деякі асимптотичні властивості шуканого розв’язку, створити основи для формування стійкого алгоритму обчислень. Ця тенденція характерна практично для всіх прикладних напрямків математичної фізики. Як правило, складність задач зумовлює суттєве використання обчислювальної техніки на етапі отримання кількісних оцінок характеристик поля, що досліджується.

Доповідь присвячена проблемі побудови загального розв’язку граничних задач в неканонічних областях. Основою в розв’язанні поставленої проблеми являється чисельно-аналітичний метод розв’язку поставленої задачі [2]. Особливістю ряду розглянутих задач є те, що на границі області задані змішані граничні умови, тобто на частині області визначена умова по тиску, а на іншій частині області – швидкість. Розглядається гармонічний у часі хвиловий процес.

Запропонований підхід до побудови аналітичного розв’язку дозволяє в повній мірі скористатися властивістю повноти і ортогональності відповідного набору функцій, з якими пов’язано представлення шуканої функції у вигляді ряду. Це приведе до розв’язку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Достовірність розв’язку, як це прийнято, обумовлена контролем якості виконання умов спряження полів на межах областей та граничної умови на поверхні об’єкта.

1. Viktor T. Grinchenko, Igor V. Vovk, Vladimir T. Matsypura. Acoustic wave problems. – New York : Begell House, Inc., 2018. – 439 p.

2. Грінченко В. Т. Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 53–60.

Грінченко Віктор Тимофійович, доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАНУ,
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: grinchenko@nas.gov.ua;

Маципура Володимир Тимофійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: mnivtt@knu.ua

Лебедева Ірина Валеріївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: lebedyevaiv@knu.ua

Трифонов Тихомир, кандидат фіз.-мат. наук, професор,
 e-mail: TihomirTrifonov@ieee.org

Великотирновський університет імені святих Кирила і Мефодія, Велико Тирново, Болгарія

ВПЛИВ ЗГЛАДЖУВАННЯ ПОВЕРХНІ СКІНЧЕННОГО КЛИНОПОДІБНОГО ОБ'ЄКТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ

Грінченко В.Т., Маципура В.Т., Лебедева І.В., Трифонов Т.

Рівень радіолокаційної помітності визначається конструктивними елементами літака. У зв'язку з цим доцільно проведення досліджень, які встановлюють ефективність заходів, спрямованих на забезпечування малої радіолокаційної помітності.

Передня кромка крила та інші аеродинамічні поверхні літака істотно відбивають хвилі при їх падінні на поверхні літака. На світовому ринку пропонується кілька пакетів програм, придатних для моделювання таких задач розсіювання. Усі вони при розробці використовують "фасетні" моделі об'єкта та метод фізичної теорії дифракції, заснований на асимптотичних алгоритмах. Застосування асимптотичних і гібридних алгоритмів передбачає наявність чіткого уявлення про фізичні явища, які призводять до формування розсіяного поля у кожному конкретному випадку: дзеркальних відображеннях, дифракції на кромках, багаторазового відбиття всередині порожнин і т.д. У даній роботі запропоновано інший підхід. У ній показано, як на базі методу часткових областей [1] можна побудувати чисельно-аналітичний розв'язок задачі розсіювання хвилі на об'єкті у вигляді скінченного клину зі згладженою поверхнею (коротко будемо називати «заокруглення скінченного клину»). Дослідження такої, досить спрощеної моделі профілю крила, дозволить дати оцінку впливу радіуса закруглення і провідності згладженої поверхні на характеристики радіолокаційної помітності крила літака.

На основі методу часткових областей побудовано точний (строгий) розв'язок задачі розсіювання плоскої хвилі на скінченному клиноподібному об'єкті. Достовірність розв'язку обумовлена контролем якості виконання умов спряження полів на межах часткових областей.

Проведено розрахунки зворотного перерізу розсіювання об'єкта. Показано, що зворотний переріз розсіювання істотно залежить від радіуса заокруглення профілю і нормальної провідності поверхні заокруглення. При цьому покриття поверхні згладжування поглинаючим матеріалом істотно зменшує, у певному діапазоні кутів падіння хвилі, розсіяне поле об'єкта.

Побудований чисельно-аналітичний розв'язок дозволяє проводити оціночні розрахунки зворотного перерізу розсіювання об'єкта при зміні в широкому діапазоні його геометричних та фізичних параметрів.

Glukhov Andriy Yuriyovych, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev,
e-mail: ndrew.gl@gmail.com

ON THE INTERACTION OF COMPOSITE MATERIAL LAYERS WITH INITIAL STRESSES DURING TORSION

Glukhov A. Yu.

The study of torsional waves plays a crucial role in various fields of science and technology, providing innovative approaches to solving complex problems and improving existing technologies. In particular, torsional waves are widely used in materials science, especially in the research and diagnostics of material properties.

In this work, within the framework of the three-dimensional linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses [2], the problem of torsional wave propagation in a layered composite material with initial stresses under layer slippage is examined.

A compressible or incompressible composite material with a periodic structure, consisting of alternating layers of two types, is considered.

For each layer type, the materials and initial stress-strain states are identical. The initial stress state of the layers is homogeneous and symmetric.

The contact between the layers of the composite material is modeled as complete slippage.

The waves propagate along the layers. To solve the problem, the method described in the monograph [1] is used.

The propagation of torsional waves in the radial direction along the layers in composite materials with initial stresses is analyzed.

The problem reduces to constructing solutions to the equation for the amplitude function while satisfying the continuity conditions at the layer interfaces and the periodicity conditions according to Floquet theory.

For symmetric and antisymmetric torsional waves, dispersion equations and their long-wavelength approximations are derived. The dispersion equations are solved analytically.

In the case of slippage, no interaction occurs between the layers of the composite material.

The propagation velocities of symmetric and antisymmetric torsional waves in each layer depend on the mechanical parameters of the layer material, layer thickness, and initial stresses.

In the long-wavelength approximation, the propagation velocities of symmetric and antisymmetric torsional waves for each layer are equal to the transverse wave velocities in a homogeneous material with initial stresses corresponding to the first and second layers, respectively.

Analytical dependencies of the propagation velocities of torsional waves in an incompressible composite material on the initial stresses are obtained for both the elastic harmonic potential and the Bartenev-Khazanovich-type potential.

1. Guz A. N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 2. Waves in partially constrained bodies. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, , 2016. 505 c.
2. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: Akadempriodyka, 2024. 668 p.

Glukhov Yuriy Petrovych, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev,
e-mail: glukhov.uriy@gmail.com

MULTILAYER STRIP ON A RIGID BASE UNDER MOVING LOAD

Glukhov Yu. P.

The intensive development of science and technology, the creation of new structures and buildings, the use of qualitatively new materials and technologies that meet the current level of scientific and technological progress, place increased demands on the study of dynamic processes in these structures and buildings.

To date, significant results have been obtained on a wide range of issues related to the interaction of moving loads with layered foundations.

Despite the considerable number of studies on the dynamics of layered media, the development of effective analytical and numerical methods for solving problems in multilayer structures remains an open challenge.

Within the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses [1], this work examines a plane problem concerning the perturbation of a prestressed multilayer strip on a rigid base under a surface load moving at a constant velocity.

A multilayer plate consisting of N layers resting on a rigid base is considered. The boundary surfaces of the layers are flat and parallel to each other, with arbitrary layer thicknesses.

The layered medium comprises compressible or incompressible, prestressed, isotropic, nonlinearly elastic materials with arbitrary elastic potential forms. The initial stress-strain state of the layered medium is assumed to be homogeneous.

The elements of the multilayer half-space are referred to Cartesian coordinate systems corresponding to the initial deformed state.

A load moving at a constant speed is applied to the free boundary of the first layer for an extended period and is independent of vertical coordinates. Relative to the coordinate system associated with this load, a steady deformed state exists.

It is also assumed that the stresses induced by the load are significantly smaller than the initial stresses. This assumption allows the application of the linearized theory of elasticity to describe the additional stress state caused by the load.

For the first time, a general approach to solving problems of this class is proposed.

The solution is obtained using the Fourier integral transform in a general form for cases of unequal and equal roots of the characteristic equations corresponding to the equations of motion of the layered medium. This applies to various conditions of combining elements of the layered half-space and for any load velocity.

The Fourier method has been adapted for solving dynamic problems in multilayer foundations.

As an example, the problem of a two-layer strip on a rigid base is analyzed.

1. Guz A.N. *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*. Kyiv: Akademperiodyka, 2024. 668 p.

Довжик Михайло Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: dovzhyk.m.v@ukr.net;
 Назаренко Володимир Михайлович, академік НАН України, д.т.н., професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: nazvm1@gmail.com

ПЛОСКА ЗАДАЧА РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛУ З ПОТЕНЦІАЛОМ БАРТЕНЄВА-ХАЗАНОВИЧА ПРИ СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТРІЩИНИ

Довжик М.В., Назаренко В.М.

Розглянуто плоску задачу руйнування матеріалу при одновісному стиску вздовж приповерхневої тріщини. В рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності [1] у випадку рівних коренів характеристичного рівняння задача зводиться до системи інтегральних рівнянь [2]. Використовуючи чисельно-аналітичну методу побудовану на основі метода Бубнова-Гальоркіна та рекурентних співвідношень для аналітичного обчислення інтегралів запропоновану в [3] задачу зведено до задачі на власні значення системи рівнянь

$$\sum_{i=0}^N F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{1ji} = 0; \quad \sum_{i=0}^N F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{2ji} = 0;$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} G_i = 0, \quad 0 \leq j, i \leq N,$$

де F_i , G_i , $\tilde{C}_1$, $i \in [0, N]$ – невідомі величини; F_{kji} , G_{kji} – точні вирази, пораховані, використовуючи символічні розрахунки.

В результаті подальшого чисельного дослідження для матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича вдалось отримати критичні укорочення та критичні напруження матеріалу для широкого інтервалу безрозмірних відстаней між тріщиною та вільною поверхнею $\beta = a/h$ (де h - відстань між тріщиною та вільною поверхнею, a - половина довжини тріщини). Використання методи [2] дозволило суттєво збільшити швидкість та точність обрахунків та отримати результати для дуже малих відстаней, аж до $\beta = 10^{-9}$.

1. Гузь А.Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 1. – С. 5–88.
2. Nazarenko V.M. Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks // Soviet Applied Mechanics. – 1986. – 22. – P. 970–978
3. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / А.Н. Гузь, М.В. Довжик, В.М. Назаренко // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 6. – С. 28–37.

Дудик Михайло¹, канд.фіз.-мат. наук, доцент,

dudik_m@hotmail.com,

Камінський Анатолій², доктор фіз.-мат. наук, професор,

dfm11@ukr.net,

Чорноіван Юрій Олексійович,² канд. фіз.-мат. наук, доцент

yurchor@ukr.net

¹Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України

АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗОН ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В МАТЕРІАЛАХ КОМПОЗИЦІЙНОГО З'ЄДНАННЯ З КВАЗІКРИХКИМ МЕХАНІЗМОМ РУЙНУВАННЯ

Сформульовано базові положення методу аналітичного моделювання маломасштабних зон передруйнування біля вершини міжфазної тріщини, які дозволяють звести вихідну нелінійну задачу механіки руйнування до крайової задачі теорії пружності про лінію розриву переміщення з заданими на ній умовами для компонент тензора напружень. Обґрунтовано використання критерію міцності Мізеса – Хілла в зоні у випадку квазікрихкого механізму руйнування матеріалу. В рамках пропонованого методу представлено точний аналітичний розв'язок задачі про розрахунок параметрів модельної зони передруйнування у квазікрихкому з'єднувальному матеріалі біля вершини розкритої тріщини на плоскій межі поділу двох різних пружних ізотропних матеріалів, який надає доступний алгоритм оцінки граничних навантажень, що передують зрушенню тріщини. Виконано числовий аналіз розвинутої моделі та продемонстровано приклад її успішного застосування у дослідженнях міжфазного руйнування деяких композитних матеріалів. Приведено результати аналітичного моделювання зони передруйнування в квазікрихкому матеріалі композиційного з'єднання з метою прогнозування повороту міжфазної тріщини.

Жук Олександр Петрович, доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: zhuk@inmech.kyiv.ua;

Жук Ярослав Олександрович, професор, член-кореспондент НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua;

Maria Kashtalyan, MSc PhD, professor
University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, UK
 e-mail: m.kashtalyan@abdn.ac.uk

ДІЯ СИЛ АКУСТИЧНОГО ВИПРОМІНЕННЯ В ІДЕАЛЬНІЙ РІДИНІ НА В'ЯЗКУ КРАПЛЮ

Жук О.П., Жук Я.О., Kashtalyan M.

Досліджено дію на краплю в'язкої рідини, яка знаходиться в необмеженій ідеальній рідині, сили акустичного випромінення, обумовленою плоскою акустичною хвилею, що поширюється в зовнішній відносно краплі рідині. Силою акустичного випромінення – акустичною радіаційною силою (АРС) – називається осереднене в часі значення гідродинамічної сили, яка діє в акустичному полі на об'єкт в рідині, і є сталою величиною. В дослідженні використовується метод [1], який дозволяє скористатися для визначення АРС лінійним наближенням. Отже, потенціал первинної хвилі Φ_i і потенціал розсіяної на в'язкій краплі хвилі Φ_s є розв'язками лінійного хвильового рівняння.

Стан рідини краплі визначимо потенціалами швидкості потенціальної $\bar{\Phi}_d$ і вихрової $\bar{\Psi}_d$ компонент хвильового поля в краплі [1]. Динамічний стан зовнішньої ідеальної рідини опишемо потенціалом $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$, де Φ_i – потенціал первинної хвилі, а Φ_s – потенціал хвилі, розсіяної на краплі.

При введених прямокутній $Ox_1x_2x_3$ і сферичній $Or\theta\varphi$ системах координат граничні умови на поверхні сферичної краплі в'язкої рідини, яка знаходиться в ідеальній рідині, мають такий вигляд:

$$v_r|_{r=R} = \bar{v}_r|_{r=R}, p|_{r=R} = \bar{p}|_{r=R}, \bar{\sigma}_{rr}|_{r=R}, \bar{\sigma}_{r\theta}|_{r=R} = 0. \quad (1)$$

В (1) позначено: $v_r, \bar{v}_r$ – швидкості зовнішньої рідини і в'язкої рідини краплі, p – тиск у зовнішній рідині, $\bar{\sigma}_{rr}$ і $\bar{\sigma}_{r\theta}$ – нормальні і дотичні напруження у в'язкій рідині краплі.

Визначений потенціал $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$ дозволяє обчислити тиск p в зовнішній ідеальній рідині з точністю до величин другого порядку порівняно з числом Маха, а власне акустична радіаційна сила, що діє на в'язку краплю в напрямі осі Ox_3 , вздовж якої поширюється плоска хвиля, знаходиться як

$$F_{x_3} = - \iint_S p R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi, \quad (3)$$

де S – площа поверхні сферичної краплі.

Встановлено, що радіаційні сили, які діють в акустичному полі на сферичну краплю можуть мати при тій самій частоті різні напрями, що визначається властивостями рідини краплі: густиною і швидкістю звуку в рідині.

1. Жук О.П., Гузь О.М., Жук Я.О. Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями. – Київ, Тов «Альянт», 2023. – 239 с.

Zhuk Yaroslav, Professor, Member-Correspondent of National Academy of Sciences of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua;
 Melnichenko Mykola, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: Realcrystallab@univ.kiev.ua;
 Fallah Arash Soleiman, Professor,
Oslo Metropolitan University, Oslo, Norway;
 e-mail: arashsoleiman.fallah@oslomet.no

TECHNOLOGY FOR LASER THERMOFORMING OF THIN-WALLED METAL STRUCTURAL ELEMENTS

Zhuk Y.A., Melnichenko M.M., Fallah A.S.

A thermodynamically consistent numerical model for simulating the process of laser thermoforming (LTF) has been developed and applied to the study of thin-walled metal structural elements. The model is based on a coupled thermomechanical formulation that incorporates temperature-dependent, physically nonlinear thermo-viscoplastic material behavior. Spatial discretization is performed using the finite element method (FEM), and the formulation accounts for both mechanical and thermal boundary conditions.

The formulation of the dynamic axisymmetric coupled problem of thermo-viscoplasticity consists of the kinematic relations, equation of motion, the energy balance equation, which is reduced to the heat conduction equation, mechanical and thermal boundary conditions as well as initial conditions. To describe the physically nonlinear thermo-viscoplastic behavior of the disk material, a generalized model [3,17,20] is used. It is consistent with the thermodynamics of irreversible processes and consists of representation of the total strain as a sum of elastic, inelastic, and thermal components, Hooke's law written for the deviatoric and volumetric parts of stress tensor, the flow rule accompanied by the condition of plastic incompressibility, kinetic equation and the evolution equations for the internal variables of isotropic and kinematic hardening.

The study investigates the interaction of a pulsed laser thermal load with a thin metal disk, focusing on the evolution of temperature and inelastic strain fields that lead to residual stress-strain states. The interaction between a thermal pulse and a structural element is studied making use of a dynamic problem statement involving a generalized model of physically nonlinear behavior of materials in a wide temperature range consistent with the thermodynamics of irreversible processes. The problem is solved in an axisymmetric formulation using a finite element methodology developed for modeling the coupled thermomechanical behavior of physically nonlinear materials. The unsteady process of forming a deflected disk configuration as a result of the residual stress-strain state caused by thermal deformations arising during the rapid heating of the material under the laser spot and the subsequent gradual cooling of the body is studied in details.

Results demonstrate that laser-induced thermal pulses can induce significant asymmetric inelastic deformation without external mechanical forces, effectively reshaping the disk. The localization and magnitude of deformation are shown to depend strongly on pulse intensity, duration, and boundary conditions. This research confirms that LTF technology is effective for precise shape control of thin-walled metal elements.

1. Zhuk Y.A., Senchenkov I. K., and Boichuk O.V. Residual stress-strain state of a steel disk under thermal pulsed irradiation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, 160, pp. 478–491.
2. Zhuk Y.A., Melnichenko M.M., Fallah A.S., and Husak V.O. Numerical Model for Simulation of the Laser Thermal Forming Process. *Axioms*, 2025, 14, 255-238.

Зражевський Григорій Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: greg.zrazhevsky@knu.ua;

Зражевська Віра Федорівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна,
 e-mail: vera.zrazhebska@gmail.com

Stan Uryasev, Ph.D., Professor,
 Stony Brook University, New York, USA
 e-mail: stanislav.uryasev@stonybrook.edu

ЗАСТОСУВАННЯ DNN ДЛЯ КЛАСИФІКАЦІЇ ЕРГОДИЧНИХ ТА ХАОТИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ СИСТЕМИ ГЕНОНА-ХЕЙЛІСА

Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф., Stan Uryasev

Система Генона-Хейліса є класичною моделлю для вивчення переходу від регулярної до хаотичної динаміки. У роботі досліджено можливість автоматизованої класифікації фазових траєкторій у гамільтоновій системі Генона-Хейліса на ергодичні, слабо хаотичні та хаотичні за допомогою глибинного навчання. Як основний критерій класифікації використано найбільший показник Ляпунова (LLE), який відображає ступінь хаотичності динаміки. Зважаючи на складність структури фазового простору, запропоновано використання методів машинного навчання, зокрема глибинних нейронних мереж.

Як показано в численних роботах, поведінка фазових траєкторій суттєво залежить від енергії E : при малих значеннях E траєкторії є регулярними, при середніх демонструють перехідну поведінку, а при великих – хаотичну. В роботі, шляхом аналізу LLE та перерізів Пуанкаре показано, що така залежність є сильною, але і при великих значеннях енергії існують ергодичні траєкторії. Шляхом квантільного поділу визначено порогові значення LLE для класифікації траєкторій.

Застосування спектральної кластеризації (SCNNA) разом з методом багатовимірною масштабування (MDS). підтверджена можливість відокремлення класів (ергодичних та хаотичних траєкторій) у просторі параметрів: початкові координати, енергія, LLE.

Послідовно досліджені три різні підходи використання FNN для класифікації фазових траєкторій. Модель 1 – двокласова класифікація ергодичних і хаотичних траєкторій в 5D просторі з $AUC = 0.965$; Модель 2 - удосконалена двокласова модель з виключенням перехідної зони з $AUC = 0.982$; Модель 3 - дворівнева класифікація з відмовою від класифікації у невизначених зонах ($AUC(1) = 0.97$, $AUC(2) = 0.68$).

В результаті проведених досліджень показано, що система Генона-Хейліса має як хаотичні, так і ергодичні траєкторії при однаковому рівні енергії, а значення LLE ефективно відображає ступінь хаотичності та може бути використано як основна класифікаційна ознака. Показано також, що кластеризація та моделі на базі глибинного навчання дозволяють з високою точністю віднести траєкторії до відповідного класу. Найкращий результат отримано при застосуванні дворівневої нейромережевої моделі з аналізом лише початкових умов (без знання LLE).

Запропонований підхід відкриває можливості для створення ефективних інструментів автоматичної класифікації динаміки без необхідності чисельного розв'язування рівнянь руху. Це особливо актуально для систем високої розмірності або з невідомими законами еволюції. Методика може бути розширена на інші нелінійні динамічні системи зі складною фазовою поведінкою.

При проведенні досліджень комплексним чином використовувались інтегровані системи Wolfram Mathematica (щира подяка компанії за надання ліцензії), R-Studio, Spyder.

Кагадій Тетяна Станіславівна, доктор фіз.-мат. наук, професор,

НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна,

e-mail: tkagadiy@gmail.com;

Говоруха Володимир Борисович, доктор фіз.-мат. наук, професор,

Дніпровський державний аграрно-економічний університет, Дніпро, Україна,

e-mail: govorukhavb@yahoo.com;

Шпорта Анна Григорівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент,

НТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна,

e-mail: shporta.a.h@nmu.one;

Онопрієнко Олег Дмитрович, канд. фіз.-мат. наук, доцент,

Дніпровський державний аграрно-економічний університет, Дніпро, Україна,

e-mail: onopriienko.o.d@dsau.dp.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОМПОЗИТУ З ДИСКОПОДІБНОЮ ТРІЩИНОЮ

Кагадій Т.С., Говоруха В.Б., Шпорта А.Г., Онопрієнко О.Д.

Волокнисті композити демонструють високу міцність уздовж напрямку армування. Адгезійна міцність є однією з ключових характеристик композиційного матеріалу. Необхідно розв'язати складну задачу щодо розподілу контактних напружень між волокном і матрицею. Для ефективного застосування чисельних методів важливо мати попередні аналітичні розв'язки, що адекватно відображають основні закономірності розподілу напружень.

В рамках дослідження розглядається тривимірна задача, що описує напружений стан волокнистого композиту з дископодібною тріщиною.

Основна увага зосереджена на одному волоконному включенні з постійним круговим поперечним перерізом, пружні характеристики якого відрізняються від характеристик матриці. Дископодібна тріщина розташована симетрично відносно цього волокна (вісь волокна проходить через центр тріщини). Матриця вважається ортотропною, при цьому її головні напрями анізотропії збігаються з осями циліндричної координатної системи. На нескінченності до тіла прикладене одноосне розтягувальне навантаження вздовж напрямку волокон певної інтенсивності. Потрібно визначити закон розподілу внутрішніх зусиль уздовж волокна, контактні зусилля взаємодії між волокном та матрицею, а також загальний розподіл напружень у тілі композиту та оцінити вплив наявності волокна на напружений стан у вершині тріщини. У запропонованій моделі волокно моделюється як одномірний пружний континуум, взаємодія якого з матрицею описується умовами контакту на циліндричній поверхні.

Для врахування всіх можливих зв'язків між компонентами вектора переміщень і швидкостями їх зміни в моделі вводяться афінні перетворення координат та шуканих функцій. Ці перетворення залежать від малого фізичного параметра. Розв'язок початкової задачі шукається у вигляді суперпозиції кількох складових, а відповідні функції подаються у вигляді рядів за дробовими степенями цього малого параметра. Вид утвореної асимптотичної послідовності визначається структурою вихідних рівнянь і порядком похибки, що виникає в крайових умовах після розв'язання задачі в нульовому наближенні. Показано, що граничні умови можна сформулювати таким чином, щоб визначити основні функції, допоміжні функції при цьому визначаються шляхом інтегрування. Таким чином, розв'язання початкової крайової задачі теорії пружності зводиться до розв'язання рівнянь Лапласа з відповідними крайовими умовами [1].

1. Shporta A., Kagadiy T., Onopriienko O. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2020. No. 1. P. 130–134. URL: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130>

Калиняк Богдан Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
 e-mail: b-kalynyak@litech.net

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ, ЯКІ СПРИЧИНЯЮТЬ ЦІЛЬОВИЙ РОЗПОДІЛ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛАХ

Калиняк Б.М.

Елементи конструкцій виготовляють і використовують в широких діапазонах температур. Термосилові навантаження при часто спричиняють деструктивну зміну характеристик матеріалів. Для зменшення перепаду напружень і стабілізації характеристик матеріалу використовують неоднорідні матеріали, зокрема, функціонально-градієнтні (ФГМ).

У роботі розвинуто математичні моделі та методи визначення напружено-деформованого стану неоднорідних пружних тіл для встановлення фізично обґрунтованих способів теплового навантаження, які призводять до заданого розподілу компонент тензора напружень, зокрема їх відсутності; аналітично визначено пружні та теплофізичні характеристики матеріалів для забезпечення температурних полів, які з урахуванням відповідних умов силового навантаження спричиняють бажаний розподіл термонапружень у неоднорідних циліндричних елементах конструкцій.

Задача розв'язана зведенням квазістатичної задачі термопружності до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіального напруження [1], з якого визначене температурне поле $t(\rho)$

$$t(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} - \frac{p[W(1) - V(1)v(\rho)] - (\rho_1^2 p_1 - p_2)[V(1) - W(1)v(\rho)]}{(1 + v(\rho))\alpha(\rho)[V^2(1) - W^2(1)]} - \\ - \frac{1 - v(\rho)}{\rho\alpha(\rho)E(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \left(\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^1 K(\rho, \eta) \sigma_r(\eta) d\eta \right) \right],$$

де $K(\rho, \eta)$ – відома функція, залежна від відносної радіальної координати ρ та $\alpha(\rho)$, $v(\rho)$, $E(\rho)$ – коефіцієнтів лінійного теплового розширення і Пуассона, та модуля пружності,

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E(\eta)}{1 - v^2(\eta)} d\eta, \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} v(\eta) \frac{\eta E(\eta)}{1 - v^2(\eta)} d\eta, \quad \sigma_r(\rho) - \text{радіальна компонента тензора}$$

напружень, p_1 , p_2 , p – силові навантаження на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра та в номальному до осі перерізі. Це температурне поле призводить до цільового розподілу напружень. Відповідні узгоджені теплові навантаження визначенно з класичної задачі теплопровідності на основі закону Фур'є. Проведено числові розрахунки.

1. Kalynyak B.M. Fredholm equations of the second kind for radial stresses aimed at the determination of the thermoelastic state of an inhomogeneous hollow cylinder /B.M.Kalynyak //Journal of Mathematical Sciences. – 2015. –Vol.205. – No.5, –P. 659–666.
<https://doi.org/10.1007/s10958-015-2273-0>.

Камінський Анатолій Олексійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: dfm11@ukr.net;

Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна,
 e-mail: dudik_m@hotmail.com;

Чорноіван Юрій Олексійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
yurchor@ukr.net

ВПЛИВ Т-НАПРУЖЕНЬ НА ПОВОРОТ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Камінський А.О., Дудик М.В., Чорноіван Ю.О.

Опис напруженого стану біля вершини тріщини в рамках лінійної механіки руйнування зазвичай обмежується сингулярними складовими тензора напружень з коефіцієнтами інтенсивності, які служать основою для формулювання критеріїв руйнування. Проте, додаткове залучення в асимптотичному полі напружень біля вершини тріщини сталої складової тензора напружень (паралельної площині тріщини компоненти, незалежної від відстані до вершини і відомої як Т-напруження) продемонстрували її важливу роль в процесах руйнування. Зокрема, вже початкові дослідження виявили вплив Т-напружень на напрямок поширення міжфазної тріщини [1], що стимулювало розвиток методів визначення Т-напружень біля їх вершин, здійснення їх розрахунків за різних умов навантаження кусково-однорідних тіл та пошук їх наслідків.

Задача про поворот міжфазної тріщини традиційно зводиться до задачі про визначення параметрів напружено-деформованого стану в околі маломасштабної повернутої тріщини, яку розв'язують переважно числовими методами. В даній роботі розвинуто аналітичний метод урахування Т-напружень в околі вершини міжфазної тріщини в умовах плоскої деформації для дослідження початкового етапу її повороту від плоскої межі поділу, який полягає в утворенні маломасштабної зони передруйнування у менш тріщиностійкому пружному матеріалі біматеріального з'єднання. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору матеріалу відриву. Т-напруження враховуються шляхом їх включення в асимптотичне поле напружень біля вершини тріщини, яке використовується для формулювання умови на нескінченості у відповідній модельній крайовій задачі теорії пружності. Застосувавши інтегральне перетворення Мелліна, вихідну задачу про розрахунок параметрів зони передруйнування зведено до функціонального рівняння відносно трансформант нормального напруження і градієнта нормального переміщення, для якого за допомогою методу Вінера – Гопфа знайдено точний аналітичний розв'язок. З отриманого розв'язку виведено рівняння для розрахунку довжини зони і кута її нахилу за критерієм максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні, а також швидкості вивільнення енергії і розкриття тріщини, які можуть бути використані для формулювання умов зрушення тріщини за енергетичним або деформаційним критеріями. Виконано числовий аналіз залежності параметрів зони від навантаження та досліджено вплив Т-напружень на її орієнтацію. Здійснено порівняльний аналіз передбачень розвинутої моделі зі значеннями кутів повороту, отриманих в ряді теоретичних і експериментальних робіт.

1. He M.Y. Kinking of a crack out of an interface: role of in-plane stress / M.Y. He, A. Bartlett, A.G. Evans, J.W. Hutchinson // Journal of American Ceramic Society. – 1991. – Vol. 74. P. 767–771.

Камінський Анатолій Олексійович, професор, докт. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна;

e-mail: fract@inmech.kyiv.ua

Курчаков Євгеній Євгенійович, старший науковий співробітник, канд. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна;

e-mail: fract@inmech.kyiv.ua

Чорноіван Юрій Олексійович, старший науковий співробітник, канд. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна;

e-mail: yurchor@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЯВИЩ В ОРТОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ТРІЩИНОЮ

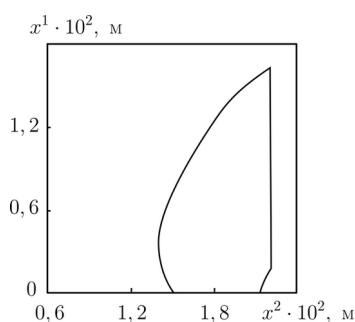
Камінський А.О., Курчаков Є.Є., Чорноіван Ю.О.

Предметом дослідження є крайові ефекти в нелінійному ортотропному тілі зі центральною тріщиною нормального відриву, з урахуванням зон передруйнування біля кінців тріщини, оточених зонами нелінійності. Крайову задачу про рівновагу нелінійного ортотропного тіла з тріщиною сформульовано в компонентах вектора переміщення з використанням тензорно-лінійних визначальних рівнянь, що зв'язують напруження та деформації, а також співвідношень між деформаціями та переміщеннями. Зону передруйнування замінено розкритим розрізом, до поверхонь якого прикладено вектори напруження, пов'язані з вектором зміщення.

Розв'язання крайової задачі здійснено узагальненим методом додаткових напружень. Досліджено вплив поперечного розміру тіла, довжини тріщини та довжини зони передруйнування на питому енергію утворення зони передруйнування, нормальні компоненти тензорів деформацій та напружень в особливих точках, а також на конфігурацію зони нелінійності. Враховано первісну анізотропію тіла. Критерії нелінійності та міцності також були враховані.

Побудовано межу зони нелінійності для одного з варіантів. Зі зменшенням поперечного розміру тіла та збільшенням довжини тріщини і зони передруйнування зростає питома енергія на утворення зони передруйнування. Компоненти тензора напружень у кінці тріщини зменшуються зі зменшенням поперечного розміру тіла та збільшенням довжини тріщини і зони передруйнування.

На рисунку зображено межу зони нелінійності, побудовану для одного з варіантів крайової задачі.



1. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E., Chornoivan Y.O. Boundary-Value Problems of Fracture Mechanics for a Nonlinear Anisotropic Body // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 3. – P. 243 – 279.
2. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E., Chornoivan Y.O. Fracture Process Zone in Cracked Nonlinear Orthotropic Body // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – **60**, N 1. – P. 34 – 58.

Кізілова Наталія Миколаївна, доктор фізико-математичних наук, професор,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com.

БІОМІМЕТИЧНІ ПОВЕРХНІ ЯК ОПТИМАЛЬНІ БІОМЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ

Кізілова Н.М.

Різні біомеханічні системи, які наявні в організмах тварин, людей, рослин та навіть в одноклітинних організмах і у міжклітинних матеріалах, мають унікальні механічні і фізичні властивості, такі як постачання рідин від точкових джерел до розподіленої системи «споживачів» - клітин, а також високу міцність і витривалість при малій масі використаних матеріалів (lightweight design). Подібні системи є елементами опорно-рухової системи і екзоскелетів, систем дихання і кровообігу та багато інших. Чисельні попередні дослідження показали, що як механічний дизайн елементів таких систем, так і використані матеріали, забезпечують оптимальні властивості і функції цих систем у сенсі мінімізації функціонала енергії із заданими обмеженнями у вигляді рівностей та/або нерівностей. Цікаво, що приклади структурного дизайну біосистем у задачах механіки рідини і газу, механічного армування біокомпозитів та мінімізації напружень можуть давати однакові розв'язки для різних наборів критеріїв оптимізації та обмежень.

У доповіді наведені принципи дизайну оптимальної геометрії дихальних шляхів, артеріальних систем у тварин, систем транспорту рідин у рослин на основі мінімізації функції дисипації та механічних напружень у системі. Наведені статистичні закономірності фрактальних систем внутрішніх і зовнішніх легень людини і тварин, нервових клітин і структур мозку. Наведені принципи дизайну природних «тепломасообмінників» у арктичних тварин і комах. Наведений стислий огляд принципів будови поверхонь у багатьох рослин і тварин, які забезпечують такі властивості як супергідрофільність/супергідрофобність, перешкодження обмерзанню при низьких температурах, акумуляція води в умовах посушливого клімату та багато інших. Головні принципи будови таких матеріалів – це використання комбінацій гідрофільних і гідрофобних матеріалів, наявність мікро- та нано- шорсткостей, фрактальна структурованість поверхні замість її гладкості. Запропонований новий підхід до оцінки оптимальної комбінації матеріалів та структурованої шорсткості на основі мінімізації поверхневої енергії Гіббса. Запропонований підхід дозволяє як оцінювати ефективність різних природних матеріалів, так і розробляти нові біоміметичні поверхні, які мають оптимальні властивості для кількох критеріїв оптимальності.

Коломійчук Олег Петрович, кандидат фіз.-мат. наук, науковий співробітник,
 Інститут математики НАН України, Київ,
 e-mail: o.kolomiichuk@gmail.com

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ ЛУІНБЕРГЕРА ДЛЯ ГІРОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ

Коломійчук О.П.

Рух гіроскопічного об'єкта керування, після зведення до форми Коші, описується наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_0 + \varepsilon A_1)x + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{1}$$

де $x = [x_1, \dots, x_{2n}]^T$ - $2n$ вимірний вектор стану, $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ - m вимірний вектор керувань, $y = [y_1, \dots, y_l]^T$ - l вимірний вектор виходу, ε малий параметр; $A_0 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$, $A_0 = -A_0^T$ - кососиметрична невинроджена матриця, $A_1 \in \mathfrak{R}_{2n \times 2n}$ - матриця збурення, $B \in \mathfrak{R}_{2n \times m}$ - матриця при керуванні, $C \in \mathfrak{R}_{l \times 2n}$ - матриця спостережень.

Керування будемо шукати у вигляді:

$$u = -Kx,\tag{2}$$

де $K \in \mathfrak{R}_{m \times 2n}$.

В роботі розроблено алгоритм побудови керування неповного порядку для системи (1). Таке керування автор назвав - керуванням Луінбергера, оскільки застосовано підхід який використовується для побудови спостережника неповного порядку (фільтра Луінбергера) описаного в [1]. Виходячи з відомої теореми про дуальність задач спостереження та керування цілком коректним є така постановка задачі. Така задача формується коли частина керувань $r < m$ відома і тоді треба побудувати тільки невідомі $m - r$ керувань. Легко бачити, що така задача є простішою у порівнянні з побудовою керування розміру m . Як і в [2] алгоритмі пошуку керування базується на другому методі Ляпунова. Так само як і в [3] необхідно проводити аналіз розмірності матриці керування. Матрицю керування можна знайти розв'язавши відповідне рівняння Ляпунова. У Випадку коли треба побудувати оптимальне керування, слід розв'язувати рівняння Ріккаті. Матриця керування буде розміру $K \in \mathfrak{R}_{m-r \times 2n}$. В залежності від розміру цієї матриці застосовується один із трьох розвинутих в [3] алгоритмів. За рахунок специфічної форми притаманної системі (1), вдалось аналітично записати закон керування. Запропонований підхід може використовуватись для побудови керування для коливальних систем, зокрема гіроскопічних. Також цей алгоритм можливо застосовувати в складі побудови адаптивного керування.

1. Kwakernaak H. Linear optimal control system / R. Sivan // Wiley-interscience, adivision of jonh wiley & sons, inc. New York, London, Sydney, Toronto 1972. 650p.
2. Новицький В.В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. – Київ, 2004. – 33 с. – (Препр./ НАН України. Ін-т математики; 2004.7).
3. Коломійчук О.П Фільтр Луінбергера в гіроскопічних системах / Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2008, Т.5, №2, С165-174

Комаров Олександр Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
e-mail: avikomarov@dnu.dp.ua;

Гергель Ірина Юріївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
e-mail: gergeli@i.ua;

Лобода Володимир Васильович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
e-mail: loboda@dnu.dp.ua;

РУХОМА МІЖФАЗНА ТРІЩИНА В БІМАТЕРІАЛЬНОМУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ КВАЗІКРИСТАЛІЧНОМУ ПРОСТОРІ

Комаров О.В., Гергель І.Ю., Лобода В.В.

В даній роботі розглянуто плоский випадок задачі про рух електропроникної тріщини в біматеріальному просторі, що складається з двох напівнескінчених 1D п'єзоелектричних квазікристалів, жорстко з'єднаних між собою. Напрямок поляризації обох складових збігається з квазіперіодичним напрямком матеріалів і є ортогональним до межі розділу. Рівномірно розподілені фононні нормальні та зсувні площинні напруження, а також фазонні напруження та електрична індукція прикладені на нескінченності. Для моделювання руху тріщини використано підхід Іоффе [1], при якому тріщина скінченної довжини рухається з усталеною докритичною швидкістю по межі поділу матеріалів. Цей підхід є певною ідеалізацією, але дозволяє проаналізувати особливості напружено-деформованого стану поблизу тієї вершини тріщини, в напрямку якої відбувається рух.

Використавши перехід від нерухомих координат X_1, X_2, X_3 до рухомих x_1, x_2, x_3 відомим шляхом ($x_1 = X_1 - vt, x_2 = X_2, x_3 = X_3$), отримано систему рівнянь руху еліптичного типу (як і для випадку нерухомої тріщини), що дозволяє використати статичний підхід побудови розв'язку задачі для фіксованих значень швидкості руху. Подібну методику було застосовано при розв'язку задачі для рухомої електропроникної міжфазної тріщини в біматеріальному п'єзоелектричному просторі [2]. Фононні та фазонні напруження, електрична індукція, похідні від фононних та фазонних переміщень і стрибка електричного потенціалу виражено через кусково-голоморфні функції. Задовольняючи граничні умови на берегах тріщини, сформульовано та точно розв'язано задачі лінійного спряження. Отримані компоненти фононних та фазонних полів представлено у вигляді аналітичних виразів.

Числовий аналіз проведено для двох різних 1D п'єзоелектричних квазікристалів, з'єднаних між собою. Встановлено, що залежність фононних та фазонних переміщень берегів тріщини від швидкості руху тріщини при незмінному зовнішньому фазонному та фононному навантаженнях зростає при збільшенні швидкості руху. Особливо ця залежність проявляється для фазонних переміщень, значення яких для швидкостей близьких до критичної збільшуються в чотири і більше разів у порівнянні з випадок нульової швидкості. Для фононних переміщень вплив швидкості руху на розкриття тріщини також суттєвий, але не такий значний і становить 30-40 відсотків у порівнянні з нерухомою тріщиною.

1. Yoffe E. The moving Griffith crack / E. Yoffe // Philosophical Magazine – 1951. – 42. – P. 739-750.
2. Herrmann, K.P. On a moving interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial / K.P. Herrmann, V.V. Loboda, O.V. Komarov // Int. J. Solids and Structures. – 2005. – 42. – P. 4555-4573.

Константинов Олександр Володимирович, доктор фіз.-мат. наук
 Інститут математики НАН України, Київ, Україна
 e-mail: akonst.im@ukr.net

СТАБІЛІЗАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ РУХІВ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ «РЕЗЕРВУАР - РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ»

Константинов О.В.

Конструкції з рідиною з вільною поверхнею часто зустрічаються в сучасній техніці як складові компоненти транспортних і енергетичних систем, систем транспортування і зберігання різних екологічно небезпечних і технологічних рідин. При цьому відносна маса рідини може бути значною, а тому рухомість рідини істотно впливає на динаміку і керування таких систем. Математичні моделі динаміки конструкцій з рідиною відносяться до різновиду об'єктів з внутрішніми ступенями вільності, і у випадку великої відносної маси рідини істотним є врахування сумісного характеру руху складових компонент системи, що традиційно є складною задачею [1]. Тому дослідження в області побудови керування та забезпечення стійкості руху складних механічних систем залишаються актуальними та затребуваними як у теоретичному, так і прикладному аспектах.

У роботі розглянуто один з підходів до побудови керування механічною системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для забезпечення періодичного руху резервуара (за заданим гармонічним законом). Для забезпечення мети керування спочатку будується програмне керування, яке обчислюється для резервуара, рідина в якому вважається «затверділою». Оскільки в системі завжди присутні збурення – похибки завдання значень початкових умов фазових координат і коливання вільної поверхні рідини, для забезпечення заданого руху резервуара необхідно до програмного керування додати керування із зворотним зв'язком. Керування зі зворотним зв'язком будується на основі спрощеної моделі: лінійної стаціонарної системи з використанням у якості фазових змінних збурень переміщення та швидкості резервуара і амплітуди та швидкості коливань вільної поверхні рідини. Шукані збурення фазових координат отримуються із повної нелінійної багатомодової моделі. На основі методу [2] система у збуреннях трансформується у канонічну форму Фробеніуса, за принципом модального керування обираються відповідний спектр системи у збуреннях та обчислюються необхідні коефіцієнти зворотного зв'язку.

Дослідження динаміки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією обчисленого керування проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [1]. Резервуар циліндричної форми вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Дослідження динаміки системи проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах всіх форм.

Підключення до системи зворотного зв'язку забезпечує прийнятне наближення до шуканого програмного руху. Підвищення частоти та амплітуди шуканого програмного руху резервуара призводить до необхідності оцінки побудованого регулятора зворотного зв'язку з точки зору якості та стійкості керованих процесів.

1. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. - Киев: НТТУ "КПИ", 1997. - 338 с.

2. Новицький В.В. Декомпозиція та керування в лінійних системах. - Київ: Інститут математики НАН України, 2008. - 301 с.

Коваленко Євген Олександрович, аспірант 2 року навчання, механіко-математичний факультет
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпро, Україна
e-mail: jenya226@gmail.com;

Чернецький Сергій Олександрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпро, Україна
e-mail: sergalexch@ukr.net

Лобода Володимир Васильович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпро, Україна
e-mail: loboda@dnu.dp.ua;

ВРАХУВАННЯ ІСТОРІЇ НАВАНТАЖЕННЯ У ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ДВОШАРОВОМУ ТІЛІ ПРИ СКЛАДНИХ УМОВАХ КОНТАКТУ

Коваленко Є.О., Чернецький С.О., Лобода В.В.

Розглядається задача визначення напружено-деформованого стану двошарового пружно-пластичного пакету кінцевих розмірів під дією абсолютно жорсткого штампу прямокутної форми. Штмп зчеплений з верхнім шаром тіла. Враховуються наступні види контакту між шарами: зчеплення, проковзування без врахування тертя і проковзування з врахуванням тертя за законом Кулона. Площинки контакту, розшарування та проковзування визначаються за результатами розрахунків. Врахування історії навантаження проводиться у межах теорії плинності з лінійним трансляційним зміцненням [1]. Навантаження розглядається для двох траєкторій вектора переміщень $\vec{\Delta}(\Delta_x, \Delta_y)$ штампу: 1 - $\Delta_x \Rightarrow \Delta_y$ та 2 - $\Delta_y \Rightarrow \Delta_x$.

За допомогою методу варіаційних нерівностей [2]. в роботах [3, 4] показано, що в цьому випадку задача еквівалентна квазіваріаційної нерівності, яка зводиться до послідовності задач мінімізації нелінійних функціоналів на кожному кроці зміни зовнішнього навантаження на множині переміщень, які задовольняють граничним умовам. Дискретизація варіаційних задач здійснюється методом скінчених елементів.

Порівнюючи результати розрахунків, отримані для різних умов контакту між шарами, при двох траєкторіях навантаження відмічаємо: значне зменшення інтенсивності пластичних деформацій при другій траєкторії навантаження (на 38%) при умові зчеплення і проковзування без урахування тертя між шарами. Врахування сил тертя у розрахунках по другій траєкторії зменшує зону пластичності і збільшує інтенсивність пластичних деформацій, значною мірою наближуючи значення до аналогічного розрахунку по першій траєкторії. Різниця у максимальному значенні інтенсивності пластичних деформацій у цьому випадку є мінімальною (< 3%).

1. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості //М.С. Можаровський. – Київ: Вища школа, 2002. – 312 с.

2. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств/ Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Тремольер Р. – Москва : Мир, 1979, 574 с.

3. Чернецький С.О. Варіаційні принципи і математичні методи вирішення граничних задач для кусково-однорідних нелінійних середовищ/ С.О.Чернецький, М.Ю. Швайко //Мат. методи та фіз.-мех. поля. –1988. – Вип. 27.- С. 64-67.

4. Чернецкий С.А. Вариационная постановка термоупругопластических задач для слоистых тел при наличии трения / С.А. Чернецкий //Вопросы прочности и пластичности. Днепропетровск: ДГУ, 1989. - С.43-49

Краснопольська Тетяна Сігізмундівна, доктор фіз.-мат.наук, професор,
Інститут гідромеханіки НАНУ, Київ, Україна
 e-mail: krasnopolska1005@gmail.com;

ДИНАМІКА ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ У ПРЯМОКУТНИХ БАСЕЙНАХ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

Краснопольська Т.С.

Хрестоподібні хвилі – це хвилі, перпендикулярні до напрямку руху хвилепродуктора. Хоча вони добре відомі принаймні зі знаменитої роботи М. Фарадея 1831 р. їх аналіз має великі математичні труднощі, викликані тим фактом, що лінеаризовані рівняння не описують механізм їх виникнення та передачу енергії від руху хвилепродуктора у такого роду хвилі. Проте вони практично (в експерименті) існують та спостерігаються. В експериментах щодо збудження хрестоподібних хвиль хвилепродуктор коливається із частотою, половинне значення якої близьке до власної частоти хрестоподібних хвиль. Нами вперше буде показано існування хрестоподібних хвиль без урахування інших поверхневих хвиль у разі, коли геометрія басейну така, що коливання середнього рівня настільки малі, що ними можна знехтувати. Хрестоподібні хвилі можуть виникати під час руху хвилепродуктора, що не залежить від поперечної координати, скажімо, від ширини каналу, коли коливання хвилепродуктора відбуваються вздовж каналу. У цьому випадку лінеаризовані рівняння не містять членів, що відповідають передачі енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі, а значить вони (хвилі) не повинні існувати. Зауважимо, що існування хрестоподібних хвиль свідчить про реалізацію параметричного резонансу, тобто, механізм збудження хрестоподібних хвиль – реалізація умов параметричного резонансу.

Усі попередні дослідження застосовували методи рішення, що відповідають знаменитому розв'язку 1929 р. Хавелока для нескінченного басейну чи по довжині, чи по глибині. Ми ж розглядаємо генерацію хрестоподібних хвиль у довгому басейні, але скінчених розмірів. Було знайдено аналітичне рівняння для збудження хрестоподібних хвиль, яке відповідає рівнянню Матґе, тобто показує можливість існування та збудження хрестоподібних хвиль у басейнах кінцевих розмірів.

Зауважимо також, що члени рівняння, що вказують на можливість ненульових амплітуд хрестоподібних хвиль та входять в параметричні члени, є пропорційними функції коливань хвилепродуктора і утворюють існування хрестоподібних хвиль. Якщо немає коливань хвилепродуктора, то не буде і хрестоподібних хвиль.

Кузьменко Володимир Володимирович, студент 2 курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com;

Троценко Ярослав Павлович, доктор філософії з галузі математики та статистики,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ У ПЛОСКОМУ ХВИЛЕВОДІ З ОКРУГЛИМИ ВИГИНАМИ

Кузьменко В.В., Троценко Я.П.

Сучасна акустика – це розділ фізики, що досліджує закономірності поширення й реєстрації звуку та має широкий спектр практичних застосувань. Її методи використовуються, наприклад, у промисловості (контроль шуму, вимірювання рівня звуку, забезпечення комунікацій), медицині (ультразвукова діагностика та терапія), інженерії (для акустичної оптимізації будівель, проектування концертних залів та студій звукозапису). Хвильовідне поширення звуку є важливим елементом в різних технологіях передачі та обробки сигналів. Глибоке розуміння механізмів поширення акустичних хвиль у хвильоводах дає змогу підвищити ефективність та якість цих технологій [1].

У даній роботі розглядається задача про поширення акустичних хвиль у нескінченному плоскопаралельному хвильоводі з двома округлими вигинами (рис. 1). Хвильовід заповнено ідеальною стисливою рідиною, а його поверхні вважаються абсолютно жорсткими.

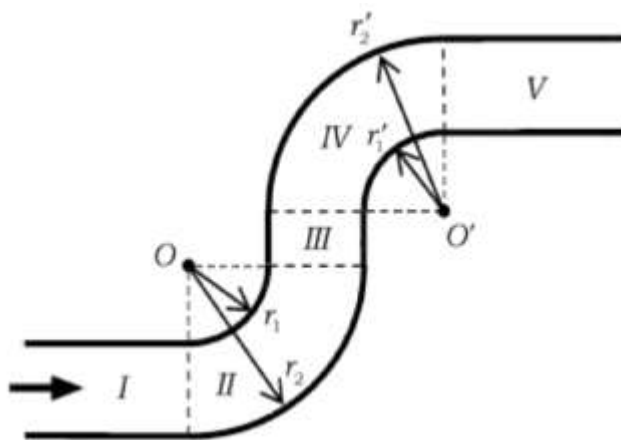


Рис. 1. Схема хвильовода з вигинами.

Метою роботи є встановлення закономірностей поширення звуку у таких хвильоводах. Дослідження акустичного поля у хвильоводі проводилось на основі методу часткових областей, що ґрунтується на ідеї поділу складної (неканонічної) області звукового поля на більш прості підобласті, у кожній з яких поле подається як сума відомих частинних розв'язків рівняння Гельмгольца. Подальше “зшивання” підобластей в єдину область існування звукового поля проводиться шляхом накладання необхідних умов спряження на межах підобластей [2].

1. Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T. Acoustic wave problems. New York: Begell House, Inc., 2018. 439 p.

2. Грінченко В.Т., Вовк. І.В., Маципура В.Т. Основи акустики. Київ : Наукова думка, 2007. 640 с.

Куценко Олексій Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: oleksii.kutsenko@knu.ua;
 Харитонova Леся Василівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний транспортний університет, Київ, Україна,
 e-mail: kharytonova-lv@ukr.net;
 Куценко Анастасія Григорівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна,
 e-mail: kutsenko@nubip.edu.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ АРМУЮЧОГО СТРИЖНЯ З МАТРИЦЕЮ

Куценко О.Г., Харитонova Л.В., Куценко А.Г.

Залізобетонні конструкції та інші види композитних конструктивних елементів незворотно зайняли свої позиції у багатьох галузях будівництва, техніки та промисловості. Однією з основних вимог, що висуваються до таких елементів, є відповідність заданим критеріям міцності, виконання яких дозволяє гарантувати несучу здатність елемента. Поряд з прямою втратою міцності внаслідок руйнування армуючого стрижня та/або матриці композиту важливим чинником, що призводить до втрати несучої здатності композитного елемента є взаємне проковзування його складових (див. напр. [1]). Найбільш відомою теорією, яка описує процес взаємного зміщення армуючих стрижнів та матриці, є теорія максимальних допустимих дотичних напружень. Дана теорія добре описує взаємодію армуючих стрижнів та матриці у випадку гладкої інтерфейсної поверхні, тобто поверхні, яка не має виступів. Проте у багатьох практично важливих випадках для покращення контакту між компонентами саме такі виступи наносяться на армуючі стрижні. Як приклад можна навести залізобетонні вироби, арматура яких має регулярне рифлення. У такому випадку теорія максимальних дотичних напружень вже не здатна адекватно описати процес взаємодії компонент композиту, адже взаємний їх рух супроводжується виникненням локальних тріщин, так званих, “Goto-cracks”. Відомі алгоритми врахування наявності локальних тріщин поблизу рифів армуючих стрижнів носять наближений характер (див. напр. [2]). Проте розвиток сучасних чисельних методів і засобів обчислень дозволяє дослідити дану проблему у повній постановці.

В даному дослідженні розглядається осесиметрична задача контактної взаємодії стрижня з періодичним рифленням з матрицею. Стрижень розтягується рівномірними напруженнями, прикладеними до одного з його кінців. Інший кінець стрижня нерухомо закріплений разом з матрицею. Контакт між стрижнем і матрицею вважається гладким. Попередньо на моделі без тріщин, визначено положення Goto-тріщин. У випадку сталевго стрижня та бетонної матриці кут між берегами тріщин і віссю стрижня виявився близький до прямого. При цьому зусилля взаємодії між арматурними рифами та матрицею стрімко і монотонно убують до постійного значення з віддаленням від торця прикладання зовнішнього навантаження. Наступною була розглянута модель з тріщинами, які виходять з рифів. Ґрунтуючись на критерії Ірвіна, шляхом ітераційної процедури були встановлені довжини кожної тріщини та загальне зміщення армуючого стрижня відносно матриці.

1. Zollo°R.F. Fiber-reinforced concrete: an overview after 30 years of development / R.F.°Zollo // Cement and Concrete Composites – 1997. – Vol. 19 (2), P. 107–122, [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(96\)00046-7](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(96)00046-7)

2. Sakalauskas°K. Pure shear model for crack width analysis of reinforced concrete members / K.°Sakalauskas, G Kaklauskas // Sci Rep. – 2023. – Vol. 13 (1), article num. 13883 – <https://doi.org/10.1038/s41598-023-41080-x>

Лавренюк Микола Васильович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: m.lavrenyuk@knu.ua;

Лавренюк Ярослав Васильович, доктор фіз.-мат. наук, с.н.с.,
 Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир, Україна,
 e-mail: y.lavrenyuk@gmail.com

ПРО ДЕЯКІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ ФІЗИЧНО-ПОІНФОРМОВАНИХ НЕЙРОМЕРЕЖ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Лавренюк М.В., Лавренюк Я.В.

На відміну від класичних числових методів оцінки напружень у механіці твердого тіла, новий підхід до аналізу таких задач передбачає використання фізико-поінформованих нейронних мереж (PINN). PINN використовують методи глибинного навчання у поєднанні із фізичними моделями: PINN апроксимують диференціальні рівняння з частинними похідними на основі відомих фізичних законів. Підхід на основі PINN був вперше розроблений М. Райсі та іншими у 2017 році [1], і його головною перевагою є здатність долати проблеми дискретизації, властиві розв'язувачам, які використовують методи на основі дискретизації розглядуваної області. PINN використовують нейронні мережі для побудови пробних функцій та використовують техніку автоматичного диференціювання [2] для обчислення безсіткових похідних. Ця робота присвячена дослідженню впливу зменшення порядку координатних функцій, що є частиною пробних функцій на точність одержаних розв'язків крайових задач механіки суцільних середовищ.

В роботі використовується модифікований підхід Лагаріса [3] до побудови розв'язуючої схеми PINN крайових задач механіки суцільних середовищ. Цей підхід полягає у використанні пробних функцій спеціального вигляду, які складаються із двох частин, одна з яких задовольняє граничним та початковим умовам, а інша є добутком нейромережевої функції на координатні функції, що обертаються на нуль на границі області та на краях розглядуваного часового інтервалу. Було розглянуто крайову задачу, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку (відносно часу та координат) для прямокутної області, коли умови Діріхле та Неймана задані на суміжних сторонах межі розглянутої області. Встановлено, що в цьому випадку мінімальний порядок побудованих координатних функцій дорівнює 7. Показано, що як для статичних, так і для динамічних крайових задач механіки суцільних середовищ, існує уніфікований підхід, що дозволяє понизити розмірність координатних функцій, що є складовими пробних функцій та обертаються на нуль на границі розглядуваної області та на кінцях часового інтервалу, як мінімум на 3. Встановлено, що використання таких координатних функцій підвищує точність одержаних за допомогою PINN розв'язків крайових задач механіки як у порівнянні із класичним PINN, так і з підходом Лагаріса.

1. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadaki s, G. E. (2017). Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations. arXiv preprint arXiv:1711.10561.
2. Baydin, A. G., Pearlmutter, B. A., Radul, A. A., & Siskind, J. M. (2018). Automatic differentiation in machine learning: a survey. Journal of machine learning research, 18(153), 1-43.
3. Lagaris, I. E., Likas, A., & Fotiadis, D. I. (1998). Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. IEEE transactions on neural networks, 9(5), 987-1000.

Ловейкін Андрій Вячеславович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: andrii.loveikin@knu.ua

КОНТАКТ ЖОРСТКОГО КЛИНОПОДІБНОГО ШТАМПУ З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ ПРИ ПОВНОМУ ЗЧЕПЛЕННІ

Ловейкін А.В.

В роботі розглядається задача про контакт з повним зчепленням жорсткого клиноподібного штампу та пружного півпростору $y > 0$. На поверхні півпростору $y = 0$, в області контакту зі штампом Ω , задані пружні зміщення, а за її межами – поверхня вільна від зусиль. Якщо вважати, що штамп занурюється в півпростір суто вертикально (дотичні зміщення в зоні контакту нульові), то в площині $y = 0$ отримаємо такі змішані крайові умови:

$$\begin{aligned} u_x|_{y=0} = u_z|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = U(x, z), \quad (x, z) \in \Omega, \\ \sigma_y|_{y=0} = \tau_{xy}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \notin \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (1)$$

Основна мета роботи – визначення характеру особливості напружень у вершині штамп.

Для розв'язання задачі вектор пружних зміщень $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$ подається у формі Папковіча-Нейбера через чотири гармонічні функції $\psi_{1,2,3,0}$:

$$2G\mathbf{u} = 4(1-\nu)\mathbf{\Psi} - \nabla F, \quad y \geq 0,$$

де $\mathbf{\Psi} = \psi_1 \mathbf{i} + \psi_2 \mathbf{j} + \psi_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орти декартових координат x, y, z , $F = x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3 + \psi_0$, G, ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона пружного матеріалу півпростору.

Якщо обмежитись відшукуванням лише поля напружень, то за відсутності дотичних зміщень u_x, u_z в області контакту Ω розв'язання задачі зводиться до побудови лише двох гармонічних функцій ψ_2 і $\psi_4 = \partial\psi_0/\partial y$, які задовольнятимуть таким крайовим умовам

$$\begin{aligned} ((3-4\nu)\psi_2 - \psi_4)|_{y=0} = 2GU(x, z), \quad (x, z) \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial y}(2(1-\nu)\psi_2 - \psi_4)|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \notin \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \in \Omega, \quad ((1-2\nu)\psi_2 - \psi_4)|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \notin \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Для їх визначення вводимо сферичні координати ρ, θ, φ , в яких півпростір $y > 0$ задається нерівностями $\rho > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi$, його поверхня – рівняннями $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$, а область контакту Ω – $\rho > 0, 0 < \theta < \theta_0, \varphi = 0$, $\theta_0 \in (0, \pi/2]$ – кут розкриття ребер штамп.

Використовуючи інтегральне перетворення типу Мелера-Фока за координатою θ та метод Вінера-Гопфа, зводимо розв'язання задачі до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язки якої дозволяють визначити розподіл напружень в області контакту Ω штамп і півпростору. Зокрема, в околі вершини штамп отримаємо

$$\sigma_y|_{\varphi=0} \sim \rho^\gamma \left(Q_0 \sin^{-1/2 \pm i p} \theta + Q_1 \sin^{-1/2 \pm i p} (\theta_0 - \theta) \right), \quad \rho \rightarrow 0+, \quad 0 < \theta < \theta_0,$$

де $p = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu)$. Показник особливості γ – дійсний, $-1/2 < \gamma < -1$ при $0 < \theta_0 \leq \pi/2$, залежить від кута θ_0 та коефіцієнта Пуассона ν .

Таким чином особливість напружень у вершині штамп має степеневий характер з дійсним показником.

Лубков Михайло Валерійович, доктор фіз.-мат. наук, с.н.с,
 Полтавська гравіметрична обсерваторія ІГФ НАН України, Полтава, Україна;
 e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ ЗСУВУ В НЕСИМЕТРИЧНИХ АНТИКЛІНАЛЬНИХ ГЕОСТРУКТУРАХ

Лубков М. В.

В наш час у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки й математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів геодинаміки та геофізики, виникають унікальні можливості дослідження раніше недоступних геофізичних процесів. Це стосується процесів, які протікають у складних, неоднорідних геологічних структурах. Недосяжність для прямих вимірювань у більшості таких об'єктів, а також їх геологічні масштаби, роблять математичне моделювання одним з основних, якщо не єдиним інструментом дослідження таких об'єктів.

Ця доповідь присвячена моделюванню зсувного деформування під дією сили тяжіння і його геофізичній інтерпретації в несиметричних антиклінальних геоструктурах. З метою кращого розуміння динаміки цих процесів.

Розглянемо деформування антиклінальної геоструктури у вигляді верхньої половини фрагменту тришарової циліндричної або конічної оболонки, що жорстко закріплена на торцях і знаходиться під дією сили тяжіння. Для опису деформування розглянутої геоструктури, що складається зі скельних або дисперсних ґрунтових порід скористаємось теорією багат шарових ортотропних пружних оболонок обертання з урахуванням зсувної жорсткості у криволінійній системі координат (s, φ, z) [1,2]. Для розв'язання представленої вище задачі деформування геоструктури під дією сили тяжіння скористаємось методом скінчених елементів, оснований на варіаційному принципі Лагранжа, що виражає мінімум потенціальної механічної енергії системи [1,2]:

$$\delta \tilde{W}(u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) = 0. \quad (1)$$

Тут $\tilde{W}$ - функціонал Лагранжа, u_0, v_0, w_0 – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки; u_1, v_1 – кути повороту нормалі до серединної поверхні відносно координатних ліній $\varphi = \text{const}$, $s = \text{const}$ відповідно, w_1 – обтіснення нормального елемента до серединної поверхні оболонки.

Результати моделювання показують, що зсувне деформування несиметричних антиклінальних геоструктур під дією сили тяжіння залежить від ступеню їх несиметричності, їх лінійних розмірів та механічних властивостей порід, що складають ці геоструктури. Встановлено, що більш компактні геоструктури випробовують менші зсувні деформації. У переважно твердих геоструктурах, що зберігають пружні властивості порід, зберігається обернено пропорційний характер зсувного деформування відносно ступеню жорсткості порід. Показано, що гравітаційне зсувне деформування та стійкість до руйнування багат шарових несиметричних антиклінальних геоструктур головним чином визначається жорсткістю внутрішніх несучих порід.

1. Lubkov M. Modeling of landslide deformations under the action of gravity / M. Lubkov // Вісник КНУ сер. геологія – 2023. – N 2(101). – С. 25 – 29.

2. Лубков М. В. Зсувні процеси в анізотропних антиклінальних геоструктурах під дією сили тяжіння / М. В. Лубков // Геофізичний журн.–2024.–N6(46).–С.109–119.

Лимарченко Олег Степанович, доктор техн. наук, професор
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 e-mail: Olelim@ukr.net
 Ковальчук Оксана Петрівна
 Національний транспортний університет, Київ, Україна
 e-mail: kovalchukoksana30@gmail.com

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ТРУБОПРОВІДНИХ СИСТЕМ У ДИНАМІЧНОМУ ПОТОЦІ РІДИНИ

Лимарченко О.С., Ковальчук О.П.

Еволюційна інтеграція суспільства будується на використанні сучасних трубопроводних мереж та комплексів (ТПК), що функціонують у відкритих нестационарних середовищах (ВНС). Природна стохастичність гетерогенних факторів силомоментного нелінійного впливу ВНС на режими коливальних процесів функціонування ТПК обумовлює зростання вимог до новітніх вбудованих фрагментів відповідно до підвищення показників їх ефективності. Будь-яка втрата або спотворення режимів функціонування глобальних ТПК у наслідок непередбачуваних, екстремальних, катастрофічних подій, спричинених ВНС, потребує все більшої кількості ресурсів у залежності від масштабів. Нелінійна механіка різно закріплених трубопроводів при високошвидкісних потоках постачання рідини необхідна для гарантування нових, сучасних вимог до фундаментальних властивостей складних динамічних систем, класу ТПК.

Розроблено нелінійну модель дослідження динаміки трубопроводу при швидкісному русі рідини, орієнтовану на дослідження перехідних режимів руху системи в околі критичних швидкостей. На основі розробленої моделі проводяться дослідження задач динаміки трубопроводу, розглядається поведінка системи при втраті прямолінійної форми трубопроводу в околі критичної швидкості для різних законів зміни швидкості руху рідини та тиску[1]. Проведено дослідження енергообміну між формами коливань системи. Аналізуються можливості використовувати різні режими зміни швидкості течії та тиску для зменшення негативного впливу наближення до критичної швидкості. При дослідженні характерних режимів руху було встановлено, що визначальними для формування динамічних процесів є врахування сил інерції Коріоліса, а також сил внутрішнього тиску в рідині, які визначають додаткові зміни критичної швидкості[2].

Доцільно стверджувати що запропоноване дослідження з врахуванням зростання високих темпів розширення нових сфер застосування продуктів ТПК, збільшенням обсягів потоків продуктів ресурсоспоживання, згідно важливості виконання бізнес міжнародних завдань тощо, спрямоване на розробку й застосування технології забезпечення експлуатаційних показників безпеки, живучості та ресурсоефективності ТПК є особливо актуальними.

1. Ковальчук О.П. Дослідження форм коливань моделі трубопровід-рідина з швидкісною течією рідини при різних способах закріплення трубопроводу/ Ковальчук О.П.// Вісник Національного транспортного університету. - 2015. - № 31. - С. 246-249.
2. Ковальчук О.П. Комп'ютерне моделювання поведінки системи трубопровід рідина, дослідження і оцінка впливу сил Коріоліса на рух рідини у трубопроводі при різних способах закріплення / Ковальчук О.П., Гавриленко В.В., Лимарченко О.С.// Міжнародний науково-технічний журнал Проблеми управління і інформатики. Київ-2019, Вип. 3, 64-71

Мазко Олексій Григорович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: mazkoag@gmail.com

ЕКВІВАЛЕНТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЕКЗОГЕННИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Мазко О.Г.

Досліджується клас лінійних дескрипторних систем керування

$$E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ – вектори відповідно стану, керування, екзогенних збурень, контрольованого і спостережуваного виходів, $\text{rank } E = r < n$. Узагальнена задача H_∞ керування для системи (1) полягає у побудові статичних або динамічних регуляторів за спостережуванним виходом, при яких замкнена система є допустимою (регулярною, внутрішньо стійкою і неімпульсною) і виконується оцінка зваженого критерію якості [1]

$$J = \sup_{(w, x_0) \in W} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T E^T H E x_0}} < \gamma, \quad \|z\|_Q = \sqrt{\int_0^\infty z^T Q z dt}, \quad \|w\|_P = \sqrt{\int_0^\infty w^T P w dt}, \quad (2)$$

де $x_0 = x(0)$, W – множина допустимих пар системи $\{w, x_0\}$, для яких $0 < \|w\|_P^2 + x_0^T E^T H E x_0 < \infty$, P, Q і H – симетричні додатно визначені вагові матриці, $\gamma > 0$ – бажаний рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Для розв'язання цієї задачі пропонується невироджене перетворення системи (1) на основі співвідношень

$$x = R \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad LAR = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^{\perp+} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} E_2^{+\top} & E_2^{\perp+\top} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де E_i – компоненти скелетної декомпозиції матриці $E = E_1 E_2^T$, $E_i^\perp$ і E_i^+ – відповідні ортогональні доповнення та псевдообернені матриці, $i = 1, 2$. Виключаючи змінну ξ_2 за умов (3) і $\det A_4 \neq 0$, де $A_4 = E_1^{\perp\top} A E_2^\perp$, отримаємо звичайну систему

$$\dot{\xi}_1 = \bar{A} \xi_1 + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 u, \quad z = \bar{C}_1 \xi_1 + \bar{D}_{11} w + \bar{D}_{12} u, \quad y = \bar{C}_2 \xi_1 + \bar{D}_{21} w + \bar{D}_{22} u. \quad (4)$$

При цьому $x_0^T E^T H E x_0 = \xi_{10}^T E_1^T H E_1 \xi_{10}$, $\xi_1(0) = \xi_{10}$, а скінченний спектр в'язки матриць $A - \lambda E$ визначають власні значення матриці $\bar{A}$.

Таким чином, узагальнена задача H_∞ керування для дескрипторної системи (1) зводиться до аналогічної задачі для звичайної системи керування (4) порядку r з функціоналом якості J типу (2). Статичні та динамічні регулятори, побудовані на основі відомих методів синтезу узагальненого H_∞ керування для системи (4) (див., наприклад, [1,2]), можна застосувати при розв'язанні даної задачі для вихідної системи (1). Запропонований підхід можна також застосувати в задачах гасіння обмежених збурень дескрипторних систем методами теорії H_2 / H_∞ керування.

1. Мазко О.Г. Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем / О.Г. Мазко. – Київ: Наукова думка, 2023. – 320 с.
2. Мазко О.Г. Синтез статичних регуляторів для керованих об'єктів із екзогенними збуреннями / О.Г. Мазко // Нелінійні коливання. – 2023. – 26, № 4. С. 484 – 494.

Майко Ілля Владиславович, аспірант, факультет математики і інформатики,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: illia.maiko@ukr.net;
Кізілова Наталія Миколаївна, доктор фізико-математичних наук, професор,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com.

ПІДХОДИ «ВЕЛИКИХ ДАНИХ» ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЕНЬ

Майко І.В., Кізілова Н.М.

Моделювання переносу, накопичення і нейтралізації забруднень у атмосфері, ґрунтах, поверхневих і підземних водах має величезне значення для оцінки небезпечності екологічного стану. В останнє десятиріччя ця проблема ускладнюється у зв'язку з (i) глобальними змінами клімату [1], (ii) значними індустриальними викидами, (iii) воєнними діями, масштабними пожежами та іншими кризами [2,3]. Окрім забруднень хімічними речовинами, мікро- і наночастинками, існують теплові забруднення від індустриальних об'єктів, теплових електростанцій та ін. Такі проблеми належать до задач тепломасопереносу. У даній роботі для розробки відповідних моделей використовуються підходи «великих даних». Значення концентрацій різних забруднювачів та температури доступні у відкритих джерелах різних країн, у тому числі по великим містам України.

Проведений порівняльний аналіз використання сучасних методів багатокомпонентної лінійної регресії, методу опорних векторів, дерева рішень, випадкового лісу і екстремального градієнтного підсилення до обробки масивів даних концентрацій різних забруднювачів $\{C_j(t)\}_{j=1}^n$ і температури повітря $T(t)$, які виміряні у вигляді часових рядів у стандартизованих лабораторіях з відомими географічними координатами. Виявлені спільні залежності з високими коефіцієнтами достовірності (R^2), які були використані для побудови моделей переносу забруднень у вигляді балансових рівнянь

$$\frac{dC_j}{dt} = G_j + Q_j^{+i,k} - Q_j^{-i,k} - A_j^w - A_j^g, \quad (1)$$

де G_j - швидкість генерації забруднення на даній території; $Q_j^{+i,k}$ і $Q_j^{-i,k}$ - перенос речовини j до даної області із сусідніх областей та від даної області до сусідніх областей, відповідно; A_j^w і A_j^g - седиментація і поглинання речовини поверхневими водами та ґрунтом, відповідно, $j=1-n$; усі функції залежать від $\{C_j\}_{j=1}^n$ і T відповідно до отриманих статистичних результатів.

Досліджені розв'язки і стійкість стаціонарних точок системи (1). Проведена валідація моделі на датасетах 2020-2021 рр. і 2023-2025 рр. Показна важливість підходу «великих даних» і методів механіки процесів тепломасопереносу для задач оцінки стану навколишнього середовища і належного керування його станом.

1. Ричак Н.Л., Кізілова Н.М. Математичне моделювання динаміки водних екосистем і можливостей їх самоочищення за умовами глобальних змін клімату. Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2022. Вип. 54. С.44-50.
2. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л. Імовірнісні моделі менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях. Вісник КНУ імені Т.Г.Шевченко. Серія «Фізико-математичні науки». 2020. N4. С. 20-27.
3. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л. Математичне моделювання впливу шквального вітру на технічні та рослинні структури на урбанізованих територіях. Вісник КНУ імені Т.Г.Шевченко. Серія «Фізико-математичні науки». 2021. N4. С.39-45.

Маковійчук Микола Васильович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
лабораторія моделювання демпфуючих систем, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: makoviy@ua.fm;

Даляк Тарас Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
лабораторія моделювання демпфуючих систем, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: tdalyak@gmail.com

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПОЛОГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНИМИ ТРІЩИНОЮ ТА ЩІЛИНОЮ

Маковійчук М.В., Даляк Т.М.

У двовимірній постановці досліджується згин пологої ізотропної циліндричної оболонки, послабленої двома колінеарними наскрізними дефектами – тріщиною та щілиною однакової довжини, що розміщені вздовж напрямної лінії поверхні оболонки. Під тріщиною тут мається на увазі математичний розріз, береги якого унаслідок згину можуть контактувати у зоні стискаючих напружень; щілину розглядаємо як розріз береги якого не контактують і на якому у прийнятій постановці задачі допускається від’ємний стрибок переміщень. Закриття тріщини, за припущенням по всій довжині дефекту, описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в одній з лицьових поверхонь оболонки [1].

Крайова задача для рівнянь класичної теорії пологих оболонок із взаємозв’язаними умовами на лініях розрізів має вигляд:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 / L. \quad (1)$$

$$[u_{y_1}](x_1) = h |[\theta_{y_1}](x_1)| > 0, \quad M_{y_1}(x_1, 0) = -m + h N_{y_1}(x_1, 0) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1), \\ N_{y_1}(x_1, 0) < 0, \quad x_1 \in (-l, l). \quad (2)$$

$$N_{y_2}(x_2, 0) = 0, \quad M_{y_2}(x_2, 0) = -m, \quad x_2 \in (-l, l). \quad (3)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин оболонки; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; Δ – оператор Лапласа; L – сукупність розрізів; $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки, $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі; N_x , N_{xy} , N_y – мембранні зусилля, M_x , M_{xy} , M_y – моменти, Q_x^* , Q_y^* – узагальнені поперечні сили. Крайові умови (2) на тріщині та (3) на щілині записано у локальних координатах $x_n O y_n$, $n = 1, 2$, де $x_n = x - (-1)^n d$, d – відстань між розрізами.

Розв’язок задачі (1) – (4) побудували за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та числового методу квадратур. За знайденими стрибками переміщень та кутів повороту нормалі обчислено коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі внутрішніх та зовнішніх вершин дефектів та контактне зусилля на зімкнутих берегах тріщини. Досліджено розподіл контактної реакції вздовж лінії тріщини та вплив взаємодії системи тріщина – щілина на напружено-деформований стан та граничну рівновагу циліндричної оболонки залежно від її кривини та взаємного розташування дефектів.

1. Шацький І.П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 26–29.

Volodymyr A. Maksymyuk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Leading Researcher, *S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*, e-mail: volmak@ukr.net

Vira S. Ushakova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, *S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*, e-mail: reznikvera18@gmail.com

Oleksii V. Ushakov, Deputy head of the center, *The Ukrainian Scientific and Research Institute of Special Equipment and Forensic Expertise of the Security Service of Ukraine, Kyiv, Ukraine*, e-mail: iv_ict@ssu.gov.ua

ON THE PHENOMENON OF SUPERCAVITATION IN A WATER BULLET TRAP

Maksymyuk V.A., Ushakova V.S., Ushakov O.V.

Bullet traps are used for forensic examination and identification of firearms based on markings on bullets. Each firearm leaves a unique trace on a bullet, which helps in solving crimes. A bullet can be used to identify the owner of the firearm. With intensive use, bullet traps may fail, especially in the case of high-energy bullets.

The theoretical basis for the design of water bullet traps lies in the problem of solid body impact on a liquid surface, which has been studied for over a century [1]. Designers of bullet traps tend to favor theoretical-experimental or purely experimental methods [2]. Most publications in this field relate to patent studies, which do not consider mechanical phenomena in bullet traps.

To determine the optimal parameters of a cylindrical hydro-bullet trap in terms of strength margin, experiments were conducted at the Shared Equipment Center 'Dynamic Process Analyzer' using an 8-channel LMS SCADAS Mobile recorder for vibration, acoustic, and strain signals.

Based on the previous upper estimate, a simplified experimental model of a vertical bullet trap was fabricated. To measure strain, a row of strain gauges with a 3 mm gauge length and 120 Ohm resistance was glued along the height of a steel pipe with a height of 2 m, diameter of 0.2 m, and wall thickness of 5 mm. The mass of the pipe filled with water was over 100 kg. Bullets weighing 7.45 g with an initial velocity of 360 m/s were fired.

As the oscillogram shows, three local peaks of maximum strain with a half-width of approximately 0.5 ms were observed, indicating the propagation of a shock wave in the pipe. The first peaks (at 4.35 s) correspond to the moments when the shock wave front passes. The second peaks (at 4.4 s) occur after a relatively short interval of 0.047 s following the first. The third peaks (at 4.6 s) appear after a longer interval of 0.26 s.

The third peaks have a straightforward explanation. The bullet trap, having received an impulse from the bullet, appears to "bounce" off the floor. It then strikes the floor, causing a new shock wave that propagates upward. During the 0.257 s interval, the structure manages to rise and fall from a height of 8.2 cm, which aligns with visual observations.

In a similar experiment [2], bullets of 5.7 mm caliber and 2.67 g mass were fired vertically into a steel water tank measuring 60 cm × 60 cm × 80 cm with a wall thickness of 5 mm, at an initial velocity of 352 m/s. The secondary wave appeared approximately 7 ms after the primary one. Based on optical observations, the authors explained the appearance of the secondary shock wave by the phenomenon of supercavitation. In our case, the secondary shock wave arrived after 47 ms.

1. Truscott, T. T., Epps, B. P., & Belden, J. (2014). Water entry of projectiles. *Annual review of fluid mechanics*, 46(1), 355-378.
2. Werner, D., Rhumorbarbe, D., Kronseder, P., & Gallusser, A. (2018). Comparison of three bullet recovery systems. *Forensic science international*, 290, 251-257.

Мельниченко Микола Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua;

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, член кор. НАНУ, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: y.zhuk@i.ua;

Рево Сергій Лукич, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: s_revo@i.ua

МІКРОТВЕРДІСТЬ СТАЛІ ПІСЛЯ КАРБОХРОМУВАННЯ

Мельниченко М.М., Жук Я.О., Рево С.Л.

Сучасні металеві матеріали, які використовуються в енергетиці, машинобудуванні, суднобудуванні та будівництві, повинні забезпечувати необхідний ресурс і надійність конструкцій. Найважливішими характеристиками, що визначають надійність роботи деталей і конструкцій, є показники зносу, тривалої міцності та корозійні характеристики. Одже, виробництво конкурентоспроможної продукції машинобудування неможливе без використання зміцнювальних технологій, особливо таких, які дозволяють сформувати на поверхні виробів шари або покриття, що відрізняються підвищеними експлуатаційними характеристиками, насамперед підвищеною зносостійкістю.

В арсеналі методів зміцнювальної обробки конструкційних та інструментальних матеріалів, розроблених до теперішнього часу, є як традиційні технології, так і принципово нові електрофізичні, електроннопроменеві, лазерні, імпульсні та інші технології, що дозволяють отримати тонкі високоміцні та зносостійкі покриття (шари) на різних матеріалах. При цьому хіміко-термічна обробка є одним із найпоширеніших видів обробки матеріалів з метою надання їм підвищених експлуатаційних властивостей.

Карбохромування це метод хіміко-термічної обробки металів, що складається з послідовного насичення поверхні сталі вуглецем, а потім хромом. Карбохромування дозволяє отримувати товстіші карбідні шари, ніж при хромуванні. Режими та способи карбохромування аналогічні процесам цементації та хромування. Карбохромування забезпечує підвищення твердості, зносостійкості та жароміцності, корозійної стійкості сталі.

В роботі проведено оцінювання фізико-механічних характеристик різних марок сталі (40Х та 45) після карбохромування. Для аналізу градієнта мікротвердості поверхневого шару та оцінки розкиду значень мікротвердості в матеріалі проводили серію вимірювань мікротвердості на заданій площі зразка. Останнє, дозволило використовуючи метод мікроіндентування провести профілювання мікротвердості зразків сталі після карбохромування. Тестування на мікротвердість проводили статичним методом Віккерса (ПМТ-3). Дослідження проводили при навантаженні на індентор в діапазоні від 50 до 200 г. Кожний з уколів складався з 10 послідовних вдавнень індентора з кроком 50 мкм. Металографічне дослідження шліфів зразків сталі після карбохромування показало, що в залежності від параметрів хіміко-термічної обробки (карбохромування) та марки сталі змінюється структура шару карбохрому. Встановлено, що структурні зміни призводять до зміни мікротвердості як у шарі карбохрому, так і у приповерхневому шарі сталевих зразків.

Одержані результати дають можливість розробки рекомендацій для оптимізації методу хіміко-термічної обробки металів при карбохромуванні з метою отримання конкурентоспроможної продукції машинобудування.

Мельниченко Микола Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua;

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, член кор. НАНУ, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: y.zhuk@i.ua;

Яровой Леонід Костянтинівич, кандидат тех. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua;

Пучко Наталя Петрівна, провідний інженер,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: natalia.puchko@knu.ua;

Водотовка Михайло Андрійович, електрослюсар,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: nanocrystallab@univ.kiev.ua

МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОНИКНЕННЯ ВИСОКОШВИДКІСНИХ УДАРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У БРОНЕМАТЕРІАЛАХ

Мельниченко М.М., Жук Я.О., Яровой Л.К., Пучко Н.П., Водотовка М.А.

Для виробництва броні застосовується низка методів одержання бронестійких матеріалів та композицій. Так сьогодні традиційно використовують високолеговані броньові сталі з такими високими характеристиками, як твердість, міцність, відносне видовження, модуль пружності, температура плавлення. Крім того, розробники броні пропонують дисперсійно зміцнені сплави на основі алюмінію, міді, більш дорогих та легких металів, таких як берилій та титан, або виготовлених на їх основі композиційних систем.

При цьому бронезилет повинен забезпечувати ефективний балістичний захист життєво важливих органів на рівні не менше 90 %. Тому, враховуючи фактори ризику для життя людини, висувуються підвищені вимоги до точності оцінки стійкості матеріалів до балістичних загроз.

Вітчизняні промислові підприємства мають обмежені можливості по вирішенню цих питань в першу чергу за рахунок відсутності сучасних розробок експериментальних стендів для систематичних досліджень динаміки процесів проникнення високошвидкісних ударних елементів у перепони з різних бронестійких матеріалів. Випробування зразків одержаної броні на балістичну стійкість проводяться лише на полігонах і, як правило, при неконтрольованих швидкостях та кутах атаки вражаючих факторів. Цей шлях є досить витратним і малоінформативним.

В роботі представлена методика експериментального моделювання проникнення високошвидкісних ударних елементів у бронематеріалах. Для ударних випробувань застосовувався експериментальний комплекс настільного розгінного стенду в якому куля діаметром 8 мм із сталі ШХ15 прискорюється енергією газів монтажного патрону при русі по каналу довжиною 570 мм. Розроблений настільний розгінний стенд дозволяє проводити дослідження з керованою швидкістю від 200 до 1500 м/с та під різними кутами атаки від 45 до 90°. Проведена апробація розгінного стенду на різних бронематеріалах та при різних швидкостях ударних елементів. Проведено вимірювання мікротвердості поверхні після обстрілу. Встановлено, що значення мікротвердості зазнає істотних змін.

Miliaiev Anton, PhD Student,
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: amilyaev@gmail.com;
 Timokha Alexander, Academician of the NAS of Ukraine,
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: atimokha@gmail.com

MACHINE LEARNING APPROACH FOR STUDYING DAMPED RESONANT SLOSHING

Miliaiev A., Timokha A.

We consider a rectangular container filled by a liquid that is longitudinally excited with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. In that case, the free-surface nonlinearity [1] plays the key role in preventing an infinite sloshing amplitude response, that is, even inviscid theories can provide satisfactory agreement with measurements. Except for the phase-lags, which is piecewise in the inviscid approximation while any nonzero damping makes it continuous. The idea is: Having known measured phase-lags and introducing damping terms, one could implement [2] a learning procedure to restore the terms in the governing equations. Measurements of the phase-lags are reported in [3]. The authors employed them to estimate a damping ratio in the Duffing equation, which was used as a phenomenological model of horizontal liquid mass centre. The ratio had to be 0.015 for a more or less satisfactory fitting of a set of experimental data. They also studied logarithmic decrements of the first natural sloshing mode and evaluated its damping ratio at 0.0084. This is larger of its theoretical 0.0057 [4]. Because the first differential equation of the single-dominant modal system [1] governs perturbations of the first natural sloshing mode, [3] incorporated a linear damping term into this equation, derived a steady-state wave (periodic) solution, and showed that, even in this case, the single-dominant modal theory is not able to satisfactory match the measured steady-state resonant response curves.

The single-dominant inviscid modal system [1] is modified in [5] by inserting nonlinear damping terms. Implementing Moiseev's asymptotic scheme, a steady-state solution of the modified system is derived, which depends on three unknown *a priori* parameters associated with the introduced damping. One parameter is responsible for logarithmic decrement of the second [-order] generalised coordinate [natural sloshing mode] but the other two are coefficients in the linear regression chosen as the amplitude-dependent damping ratio for the first (lowest-order) generalised coordinate (mode). After defining the loss function as an integral distance between experimental (measured) and theoretical phase-lag curves, the gradient descent method is applied to compute the three damping-related parameters. An excellent agreement is shown except for the cases when, according to observations [3], applicability of the single-dominant modal theory is questionable.

1. 1. Faltinsen O.M., Rognbakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth / O.M. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*.- 2000.- 407.- P. 201-234.
2. 2. Ahmed S.E., Pawar S., San O., Rasheed A., Iliescu T., Noack D. On closures for reduced order models - a spectrum of first-principle to machine-learned avenues / S.E. Ahmed // *Physics of Fluids*.- 2021.- 33 (9).- Article 091301.- P. 1-25.
3. 3. Bäuerlein B., Avila K. Phase lag predicts nonlinear response maxima in liquid-sloshing experiments / B. Bäuerlein // *Journal of Fluid Mechanics*.- 2021.- 925, A22.- P. 1-29.
4. 4. Keulegan G. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins / G. Keulegan // *Journal of Fluid Mechanics*.- 1959.- 6 (1).- P. 33-50.
5. 5. Miliaiev A., Timokha A. Viscous damping of steady-state resonant sloshing in a rectangular tank / A. Miliaiev // *Journal of Fluid Mechanics*.- 2023.- 965, R1.- P. 1-12.

*Müller Wolfgang¹, Doctor rar.nat., Doctor h.c., Prof., Foreign member of the National Academy of Sciences of Ukraine,
 Schek Luca N.¹,
 Vilchevskaya Elena N.¹, Guest Prof. and Mercator Follow,
 Technical University of Berlin, Berlin, Germany.*

4D-PRINTED LIQUID CRYSTAL ELASTOMERS - A COMPUTATIONAL ANALYSIS OF THEIR DEFORMATION BEHAVIOR OF UNDER CHANGE OF TEMPERATURE

This presentation focuses on FE simulations of Liquid Crystal Elastomers (LCE). For this purpose, a new method is proposed based on the combination of nonlinear deformation analysis based on a St. Venant-Kirchhoff law, *i.e.*, a physically linear but geometrically nonlinear stress-strain relationship. The deformation gradient is decomposed multiplicatively into elastic, (classical) thermal, and phase transformation parts. For the transformation part a novel representation is chosen based on an orientation parameter within a distribution function for the mesogens. This parameter can be linked to temperature. The stiffness tensor in the St. Venant-Kirchhoff law as well as the tensor of thermal expansion (for the thermal part of the deformation gradient) are obtained from Mori-Tanaka homogenization schemes. It is shown that classical thermal expansion with positive expansion coefficients and realistic values does not contribute much to the total large deformations. The major contribution comes from phase transformation. It is, therefore, misleading to model the deformation of LCEs during temperature change by classical thermal expansion, although exactly this is done in the literature by a trick—namely, using negative anisotropic thermal expansion coefficients.

Новицький Віктор Вікторович, аспірант,
 Інститут математики НАН України, Київ, Україна

e-mail: vivi.novytskyi@gmail.com

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ ТИСКУ В СУДИНІ НА ОСНОВІ ПРУЖНОЇ МОДЕЛІ ФРАНКА ЗА УМОВ ЗМІННОЇ ЕЛАСТИЧНОСТІ СТІНКИ

Новицький Ві.Ві.

У межах задачі моделювання кровотоку в артеріальних судинах, як замкненої механічної системи зі змінною пружністю стінки, розглянуто модель Франка у формі:

$$C(t) \cdot P'(t) + P(t)/R = Q(t), \#(1)$$

де $C(t)$ — ємність судини, $P(t)$ — тиск, $Q(t)$ — об'ємна швидкість кровотоку, R — гідравлічний опір.

Оскільки $C(t)$ є змінною величиною, яка відображає еластичні властивості стінки судини, поставлено задачу знаходження тиску $P(t)$ при відомому $Q(t)$.

Аналітичний розв'язок має вигляд:

$$P(t) = C \cdot e^{-\int_0^t \frac{dt_1}{RC(t_1)}} + \int_0^t Q(t_2) \cdot \left[e^{\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{RC(t_1)}} - e^{\int_0^t \frac{dt_1}{RC(t_1)}} \right] dt_2, \#(2)$$

де C — стала інтегрування. Формула дозволяє обчислити тиск $P(t)$ у судині залежно від змін еластичності її стінки. Такий підхід застосовується для математичного моделювання гемодинаміки при пульсовому режимі кровотоку, коли потік $Q(t)$ відомий експериментально — наприклад, за даними УЗД- сканування, доплерографії та артеріальної смарт-тонометрії.

Отримане аналітичне розв'язання дозволяє визначати зміну тиску $P(t)$ в артерії при заданому профілі потоку $Q(t)$ та відомій функції ємності $C(t)$, яка описує змінну еластичність стінки судини.

Ці обчислення сприяють відтворенню профілю тиску на основі виміряного кровотоку та експериментально визначених еластичних властивостей. Це забезпечує можливість точного моделювання стану судинної системи в умовах пульсового навантаження.

1. Westerhof N., Stergiopulos N., Noble M. Snapshots of Hemodynamics, 2nd ed. — Springer, 2010.
2. Stergiopulos N., Westerhof B.E., Westerhof N. Total arterial inertance as the fourth element of the Windkessel model // American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology, 1999, 276(1): H81–H88.

Олійник Валерій Никифорович, кандидат фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: v_oliyник@yahoo.com

АКУСТОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ «ПОВІТРЯ – ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА – ПОВІТРЯ» ПРИ ЗБУДЖЕННІ ПЛОСКОЮ МОНОГАРМОНІЧНОЮ ХВИЛЕЮ

Олійник В.Н.

Ефекти акустопружної взаємодії яскраво проявляються при формуванні розподілів акустичного поля під головним обтічником ракети. Саме головна частина в якій розташовуються корисний вантаж та приладовий відсік з системами керування та іншою апаратурою, традиційно розглядається як потенційно вразлива для дії потужного звукового поля, генерованого ракетою на різних етапах польоту. На стартовому відрізку відхилена стартовими спорудами хвостова частина реактивного струменя править за інтенсивне джерело зовнішніх акустичних навантажень, дію яких на корпус ракети можна уявити як прихід сукупності акустичних хвиль зі сферичними чи плоскими фронтами.

При моделюванні акустичної обстановки під головним обтічником ракети зазвичай розглядають випадок падіння на скінченну циліндричну чи циліндро-конічну оболонку плоскої звукової хвилі. Для одержання кількісних оцінок здебільшого застосовуються різні модифікації методу скінченних елементів, які дозволяють ефективно визначати просторові розподіли звукового поля в обмеженій області, але не дають вичерпної інформації про механізми його формування.

Виходячи з цих міркувань, видається доцільним розглянути максимально спрощену двовимірну постановку задачі, яка допускає розв'язання класичними аналітичними методами з явним виділенням власних мод коливань елементів системи. Незважаючи на обмеженість такого підходу, він уже приніс певну користь в обґрунтуванні уявлень про поведінку акустичних навантажень на поверхні корисного вантажу, розміщеного під головним обтічником. Водночас досі не було чіткої відповіді на питання про те, зміна яких кількісних параметрів домінує при формуванні звукового поля в цій області.

Для її одержання до розгляду було запропоновано двовимірну зв'язану акустопружну задачу про падіння плоскої моногармонічної хвилі тиску на нескінченну кругову циліндричну тонкостінну пружну оболонку, ззовні та зсередини оточену акустичним середовищем з параметрами повітря в приземному шарі при нормальних умовах. Для опису коливань оболонки було обрано наближення Кірхгофа–Лява. Розміщений усередині оболонки корисний вантаж імітувався за допомогою концентричної акустично жорсткої вставки. При розрахунках варіювалися швидкість поширення поздовжніх хвиль у матеріалі оболонки та радіус вставки, який визначав товщину повітряного прошарку під обтічником.

У результаті було показано, що ключову роль у формуванні резонансних властивостей підобтічникового простору відіграє саме просторова конфігурація шару повітря в ньому. Виявлено два типи резонансів: пов'язані переважно зі збудженням окружних мод оболонки й ті, що відповідають збудженню радіальних стоячих хвиль у повітрі під нею. При цьому зміна швидкості поширення хвиль в оболонці призводила лише до дрейфу резонансу, пов'язаного з власною частотою її пульсацій. Усі резонанси, пов'язані з наступними окружними модами коливань оболонки, виявились мало чутливими до варіації пружних характеристик оболонки в широких межах.

Отримані дані можуть бути корисними для вироблення практичних рекомендацій щодо зменшення рівнів акустичних навантажень на об'єкти, розміщені під обтічником та сам корпус ракети.

Онишкевич Володимир Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний лісотехнічний університет України, Львів, Україна,
 e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

Барабаш Галина Михайлівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
 e-mail: galynabarabash71@gmail.com

КВАЗІСТАТИЧНА КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ СКІНЧЕННОГО ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ ФРИКЦІЙНОМУ ТЕПЛОУТВОРЕННІ

Онишкевич В.М., Барабаш Г.М.

Існує багато різноманітних параметрів, за допомогою яких вдається описати контактування тіл, проте вирішити більшість теоретичних і практичних проблем неможливо без розгляду геометричних характеристик контактної взаємодії. Зокрема, вперше вплив геометрії контактних поверхонь і лінійних розмірів штампа на контактні напруження в системі штамп-основа було досліджено в [1]. Однак в контактних задачах термопружності фактори скінченності розмірів штампа та криволінійність його основи здебільшого не враховують.

На прикладі осесиметричної задачі про втискування в пружний півпростір скінченного кругового циліндра, що обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю, розглянуто методика, яка дозволяє змодельовати і дослідити широкий спектр явищ, які можуть виникати при взаємодії тіл: відокремлення контактних поверхонь, затинання, одночасне існування зон зчеплення і ковзання. На ділянці контакту за рахунок дії сил тертя утворюється тепло, і неідеальний тепловий контакт між циліндром і півпростором математично моделюється за допомогою «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні [2]. Між незавантаженими поверхнями тіл та зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона. Для кожного з контактуючих тіл розв'язано нестационарне рівняння теплопровідності з початковою умовою на температуру, в решті вихідних співвідношень часова змінна фігурує як параметр. Використовуючи інтегральне перетворення Лапласа за часом, застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля за радіальною координатою для півпростору та метод прямих для циліндра, отримали розподіл температури та теплових полів у циліндрі та півпросторі, контактних напружень і переміщень півпростору. Обернення трансформант шуканих функцій здійснювалося числово.

Виявлено якісно відмінні етапи загальної картини квазістатичної взаємодії для поставленої задачі. З'ясовано, що перебіг відповідних процесів визначається конкретними навантаженнями і характеристиками пари тертя. Відзначено, що квазістатичні контактні задачі доцільно розглядати тоді, коли початкові дані та характер навантаження спричиняють перевищення максимальних значень досліджуваних величин відповідних характеристик у стаціонарному режимі.

1. Barber J. R. Indentation of an elastic half-space by cooled flat punch / J. R. Barber // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1982. – Vol. 35(1). – P. 141–154.

2. Онишкевич В. М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Вип. 42, №1. – С. 82–86.

Petrashchuk Vasyl Mykolayovych, PhD student, Laboratory of Modeling of Damping Systems,
Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Lviv,
Ukraine,

e-mail: vpetrashchuk.academic@gmail.com

Shatskyi Ivan Petrovich, DSc (Phys. & Math.), Prof., Laboratory of Modeling of Damping Systems,
Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Lviv,
Ukraine,

e-mail: ipshatsky@gmail.com

BENDING OF A TRANSVERSELY INHOMOGENEOUS PLATE WITH COLLINEAR CONTACT CRACKS

Petrashchuk V. M., Shatskyi I. P.

The problem of contact interaction of crack faces of a system of collinear through cracks during bending of thin functionally graded through-thickness plates is considered in a two-dimensional formulation. Based on the rigid normal hypothesis, the incomplete through-thickness crack closure is interpreted as the joining of crack faces at the outer surface of the plate (model of contact along a line [1]).

A boundary value problem is formulated for a pair of biharmonic operators in domains with cuts corresponding to such a model.

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi &= 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \\ [u_y] &= h |[\mathcal{G}_y]| > 0, \quad M_y = h N_y \operatorname{sgn}[\mathcal{G}_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L, \quad y = 0; \\ N_x &= N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad M_y = m, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Here φ is the stress function, w is the plate deflection, $[u_y]$, $[\mathcal{G}_y]$ are the jumps of displacement and normal rotation angle, N_{ij} , M_{ij} are the membrane forces and bending moments, m is the value of uniformly distributed bending load, L is the set of cuts.

An analytical solution of singular integral equations is constructed for a system of two collinear defects. In particular, in the case of constant Poisson's ratio and symmetric distribution of Young's modulus with respect to the midsurface of the plate, for the interaction of two identical collinear cracks of length $2l$ with distance d between centers, the stress and moment intensity factors near the defect tips are calculated by the formulas:

$$K_N^\pm = \frac{|m| \sqrt{\pi l}}{h} \frac{\kappa}{1 + \kappa} F^\pm(\lambda), \quad K_M^\pm = \frac{m \sqrt{\pi l}}{1 + \kappa} F^\pm(\lambda);$$

$$\kappa = \frac{h^2 \int_{-h}^h E(z) dz}{\int_{-h}^h E(z) z^2 dz} \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \text{ is the material inhomogeneity parameter; } F^\pm(\lambda) = \frac{\pm 1}{\lambda \sqrt{1 \pm \lambda}} \left(1 \pm \lambda - \frac{E(\lambda)}{K(\lambda)} \right),$$

$K(\lambda)$, $E(\lambda)$ are complete elliptic integrals of the first and second kind, $\lambda = 2l/d$.

The influence of material inhomogeneity and mutual arrangement of defects on the magnitude of stress intensity factors and on the distribution of contact reaction on the closed crack faces is analyzed.

1. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П.Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.

Попов Всеволод Геннадійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 НУ «Одеська морська академія», Одеса, Україна ,
 e-mail: dr.vg.popov@gmail.com ;
 Кирилова Ольга Іванівна, кандидат фіз.-мат. наук,
 НУ «Одеська морська академія», Одеса, Україна ,
 e-mail: olga.i.kyrylova@gmail.com

ВЗАЄМОДІЯ ДИНАМІЧНО ЗАВАНТАЖЕНИХ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ

Попов В.Г., Кирилова О.І.

Нехай пружне ізотропне тіло, що знаходиться в стані плоскої деформації, містить систему смугових тонких жорстких включень. В перерізі площиною Oxy включення розміщені на відрізках довжини $2d_k$ з центрами у точках $O_k(a_k, b_k), k=1, 2, \dots, N$ і мають товщину $s_k \ll h_k$ (Рис. 1). На включення діють нормальні $Q_k e^{-i\omega t}$ і зсувні $T_k e^{-i\omega t}$ сили, і моменти $M_k e^{-i\omega t}$ (Рис. 2), що гармонічно змінюються за часом.

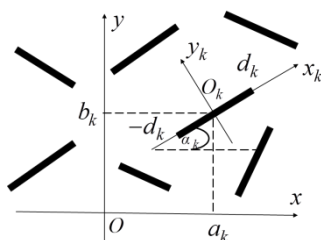


Рис.1

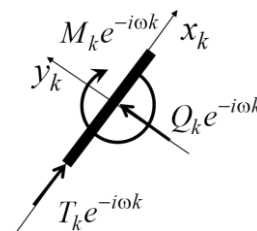


Рис. 2

Переміщення в тілі $u(x, y), v(x, y)$ задовольняють рівняння руху пружного середовища за умов плоскої деформації. Ці рівняння слід доповнити граничними умовами на включеннях, які внаслідок малої товщини формулюються на їх серединній поверхні. Для цього з кожним включенням пов'язується локальна система координат $O_k x_k y_k$ (Рис.1). Позначимо $u^k(x_k, y_k), v^k(x_k, y_k), \sigma_x^k(x_k, y_k), \sigma_y^k(x_k, y_k), \tau_{yx}^k(x_k, y_k)$ – переміщення і напруження у системі $O_k x_k y_k$. Тоді, за умов повного зчеплення включень з матрицею, мають виконуватись рівності:

$$v^k(x_k, 0) = h_{1k} + \beta_k x_k; u^k(x_k, 0) = h_{2k}, \quad -d_k < x_k < d_k, k=1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Окрім того, наявність включень спричиняє розриви напружень, стрибки яких позначено

$$\sigma_y^k(x_k, +0) - \sigma_y^k(x_k, -0) = \chi_{1k}(y); \tau_{yx}^k(x_k, +0) - \tau_{yx}^k(x_k, -0) = \chi_{2k}(y); -d_k < x < d_k; k=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

В рівностях (1), (2) часовий множник $e^{-i\omega t}$ відкинуто. Невідомі амплітуди коливань включення, що входять у (1), визначаються з рівнянь їх руху. За таких умов слід визначити напружений стан в тілі, дослідити вплив взаємодії включень на інтенсивність напружень, зокрема, на значення КІН. Метод розв'язання ґрунтується на поданні поля переміщень у вигляді суперпозиції розривних розв'язків рівнянь руху середовища зі стрибками (2), побудованих для кожного включення в пов'язаній з ним системі координат. Після реалізації граничних умов (1) приходимо до системи $2N$ інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків напружень, які розв'язуються методом механічних квадратур. На числових прикладах показано, що хвильова взаємодія включень приводить до збільшення напружень в порівнянні з одним окремим включенням. Встановлено існування частот, при яких абсолютні значення КІН до кількох разів перевищують їх статичні аналоги і значення КІН для окремого включення.

Ревенко Віктор Петрович, доктор фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: victorrev@ukr.net

УМОВИ ВІДСУТНОСТІ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В ПЛАСТИНІ ЗА ДІЇ ДВОВИМІРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Ревенко В.П.

У доповіді використано тривимірну статичну теорію термопружності і двовимірну стаціонарну температуру. В роботі [1] знайдено частковий розв'язок системи рівнянь Нав'є і напруження, коли температура $T(x, y)$ не є лінійною функцією:

$$u_j^T = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \beta_1 \Omega_j, \quad j = \overline{1, 2}, \quad u_3^T = \alpha z T, \quad e^T = 3\alpha T, \quad \sigma_3^T = 0, \quad \sigma_1^T + \sigma_2^T = 0, \quad (1)$$

де $\Omega_j = \int T dx_j$, $\psi(x, y) = \beta(x\Omega_1 + y\Omega_2)$, $\Delta\psi = -\alpha T$, $\beta_1 = \frac{3}{2}\alpha$, $\beta = -\frac{1}{4}\alpha$. Переміщення і напруження (1) не містить пружних складових, і тому їх назвемо чисто температурними.

Після інтегрування термопружних напружень по товщині пластини і задоволенні крайових умов на її плоских поверхнях розрахунок її тривимірного термопружного стану зведено до розв'язку двовимірних рівнянь на її серединній поверхні. Виражено їх загальний термопружний розв'язок через три двовимірні гармонічні функції. Знайдено такий вектор переміщень, який може описувати як температурний, так і пружний тривимірний напружений стан пластини. Термопружний стан пластини, який визначається температурою і задовольняє крайові умови на поверхнях тривимірної пластини названо температурним.

Встановлено, що *температурні напруження пластини рівні нулю та розраховано температурні переміщення*:

$$u_1^T = 2\alpha \left[x \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right], \quad u_2^T = 2\alpha \left[y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} + 3 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right], \quad (2)$$

де $T = -8 \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x^2}$, η – гармонічна функція. Знайдено прогин верхньої поверхні шару

$$u_z^+ = -\frac{h\nu}{2E}(\sigma_1^e + \sigma_2^e) + \frac{h\alpha}{2}T, \quad (3)$$

де σ_1^e, σ_2^e – пружні напруження.

Висновок. За дії двовимірного стаціонарного температурного поля в пластині і її вільного теплового видовження температурні напруження будуть нульовими.

Conclusions. It was established that the sum of normal temperature stresses is equal to zero, and the volume deformation is equal to $e = 3\alpha T$; if the temperature does not change in some spatial direction, then in this direction the normal temperature stresses are zero. A displacement vector has been found that can describe both the temperature stresses and elastic three-dimensional stress state of the plate. Under the action of a two-dimensional stationary temperature field in the plate and its free thermal displacements, the temperature stresses will be zero.

1. Revenko V. Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory/ V. Revenko// Scientific Journal of TNTU. – 2022. – **108**, № 4. – P. 64–73.

Ричак Тарас Львович, аспірант, факультет природничих наук,
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: taras_rychak@ukr.net;

Кізілова Наталія Миколаївна, доктор фізико-математичних наук, професор,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com;

Ричак Наталія Львівна, кандидат географічних наук, доцент,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: rychak@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ У СИСТЕМІ ЗВ'ЯЗАНИХ ВОДНИХ РЕЗЕРВУАРІВ НА ПРИКЛАДІ БУРШТИНСЬКОЇ ТЕЦ

Ричак Т.Л., Кізілова Н.М., Ричак Н.Л.

Погіршення екологічного стану водойм багатьох регіонів України, яке підтверджується даними постійного екологічного моніторингу, пов'язане з (i) глобальними змінами клімату, (ii) індустріальними викидами та (iii) активними воєнними діями та інтенсивним бомбардуванням на більшості територій України, які викликають масштабні пожежі, руйнування підприємств та інфраструктури з великими викидами забруднювачів до атмосфери, до резервуарів поверхневих вод та ґрунтів, де ці небезпечні речовини переносяться, накопичуються і можуть бути частково нейтралізовані. Оскільки перелік забруднювачів достатньо великий, для розв'язання задач розуміння процесів переносу, прийняття рішень і оптимального керування потрібні відповідні постановки, аналіз і методи розв'язання задач математичної екології [1].

У даній роботі представлено балансову модель зв'язаної системи резервуарів води річка Гнила Липа + Бурштинський резервуар-охолоджувач для Бурштинської ТЕЦ + Річка Дністер із притоками у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dV_j}{dt} = Q_{j-1,j} - Q_{j,j+1} + q_j^{surf} + q_j^{atm} - q_j^{evap} - q_j^{transp} - q_j^{filtr}, \quad (1)$$

де V_j - об'єм води у резервуарі з номером $j=1-5$, $Q_{i,k}$ - об'ємний масоперенос води з резервуару i до резервуару k , q_j^{surf} і q_j^{atm} - притоки поверхневих вод і атмосферні опади, q_j^{evap} , q_j^{transp} , q_j^{filtr} - випаровування води з поверхні резервуара, транспірація води з листя водних рослин і фільтрація поверхневих вод до ґрунтів і підземних вод.

Для усіх джерел маси у правих частинах рівнянь (1) для $j=1-5$ визначені відповідні математичні вирази, які використовуються у математичній екології. Для визначення коефіцієнтів використані результати статистичного аналізу даних. Для розв'язання системи диференціальних рівнянь був використаний метод Рунге-Куты RK4. Валідація чисельного алгоритму була проведена на даних за 2020-2022 роки. Потім було проведено порівняння результатів чисельних розрахунків за запропонованою математичною моделлю з даними моніторингу рівня води у резервуарах $j=1-5$ протягом 2023-2025 років. Показані переваги запропонованої моделі для прогнозу екологічного стану зв'язаних річкових систем за умов багатофакторного впливу (i)-(iii) завдяки результатам математичної статистики і моделям математичної екології.

1. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л., Чебукін Д.С., Лукієнко М.В. Екологічна оцінка якості поверхневих вод у бездощовий період в умовах міського водозбору // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, сер. «Геологія. Географія. Екологія». – 2021. – N54. – Р.289-305. doi:10.26565/2410-7360-2021-54-22.

Рушицький Ярема Ярославович¹, доктор фіз.-мат. наук, професор, чл.-кор. НАН України
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Юрчук Василь Миколайович¹, кандидат фіз.-мат. наук
e-mail: vasil_2008@ukr.net

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна.

НОВИЙ ХВИЛЬОВИЙ ЕФЕКТ, ЯКИЙ СУПРОВОДЖУЄ КЛАСИЧНИЙ ЕФЕКТ ГЕНЕРАЦІЇ ДРУГОЇ ГАРМОНІКИ

Рушицький Я.Я., Юрчук В.М.

З ряду можливих нелінійних хвильових рівнянь вибирається квадратично нелінійне, яке відповідає поширенню плоскої повздовжньої хвилі $u_1(x, t)$ вздовж осі абсцис [1]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)] \quad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) в рамках трьох різних методів [2] має вигляди, які, як вважається, описують генерацію 2^{ої} гармоніки:

$$\text{M1 (повільно змінних амплітуд)} \quad u_1(x_1, t) = A_1 e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A + 3B + C)}{(\lambda + 2\mu)} \right] (k_{L1})^2 (A_1)^2 x_1 e^{2i(k_1 x_1 - \omega t)},$$

$$\text{M2 (послідовних наближень)} \quad u_1(x_1, t) = u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{10})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t),$$

$$\text{M3 (обмеження на градієнт амплітуди)} \quad u_1(x_1, t) = a^0 e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2) c_L t \alpha (k_L)^2 (a^0)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}.$$

Перші доданки є ідентичними і описують першу гармоніку. Другі доданки дуже подібні, але не ідентичні. Другий доданок в розв'язках може бути уніфікованим.

Для прикладу розв'язок для М3 в найпростішому вигляді може бути такий:

$$u_1(x_1, t) = u_{10} [\cos(k_L x_1 - \omega t) + 0,1 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t)]. \quad (2)$$

Для (2) показано графічно деформацію 2^{ої} гармоніки. На Рис.1 зображені пряма лінія $u = 0,2x$, недеформована і деформована функції (гармоніки). Рис. 2 відповідає першому періоду 2^{ої} гармоніки і містить два графіки – недеформованої гармоніки і деформованої функції. Тут виявляється відмінність між графіками – як якісна, так і кількісна.

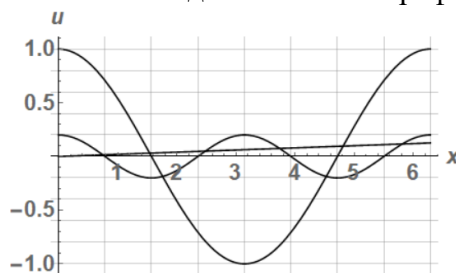


Рис.1

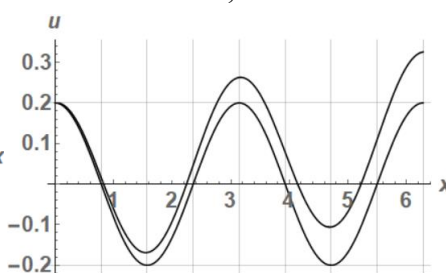


Рис.2

Спостереження полягає, що другий доданок змінює початковий профіль 2^{ої} гармоніки. Ця зміна вводить несиметрію стосовно горизонтальної і вертикальної осей. Вертикальна несиметрія видна на першому періоді. Горизонтальна виявляється у тому, що ліві і праві схили горбів деформуються по-різному – праві стають більш похилими вздовж прямої.

Отже, розв'язки, які відповідають трьом методам, виявляють новий і неописаний раніше нелінійний хвильовий ефект – несиметричне деформування профіля 2^{ої} гармоніки.

1. Bloembergen N. (1996). Nonlinear Optics. 4th Ed. Singapore: World Scientific Pub Co Inc., pp.190.

2. Rushchitsky J.J. (2014). Nonlinear Elastic Waves in Materials. Heidelberg: Springer, pp.455. DOI: 10.1007/978-3-319-00464-8.

Samoilenko Oleh, PhD student,
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: oleh.samoilenko@imath.kiev.ua

MATHEMATICAL PROBLEMS OF FEATURE MATCHING FOR VISION-GUIDED MECHANICAL SYSTEM WITH LIMITED RESOURCES

Samoilenko O.

Vision-based sensing is increasingly used in mechanical systems such as autonomous aerial and ground robotic vehicles, where image data serves as a primary input for navigation, mapping, state estimation, and motion control [1, 2]. These systems often operate under real-time and resource-constrained conditions, motivating the development of accurate and computationally efficient computer vision algorithms for robust feature detection and matching.

A key component of such systems is the identification and correspondence of keypoints — distinctive image locations $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ within a digital image function $I: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^c$, where $I(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^c$ denotes the local pixel intensity, c denotes the number of channels. Each keypoint is associated with a local descriptor $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^D$, which captures the surrounding visual structure in a transformation-invariant format suitable for comparison.

Keypoints are matched across images by comparing descriptors and establishing correspondences $\mathbf{x}'_j \longleftrightarrow \mathbf{x}_i$. These matches are then verified through geometric constraints requiring $\|\mathbf{x}'_j - \mathbf{H} \mathbf{x}_i\| < \varepsilon$, where $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ is a transformation matrix, and ε is a matching tolerance. Matches satisfying this condition are labeled as inliers, and their count is used to define quantitative accuracy metrics such as precision and recall.

We present a mathematical evaluation of the accuracy, computational efficiency, and performance trade-offs of keypoint-based detection and matching techniques such as Scale-Invariant Feature Transform (SIFT) [3] and Oriented FAST and rotated BRIEF (ORB) [4], as applied to real-time vision systems onboard mechanical platforms with limited processing and memory capacity. This study establishes a theoretical foundation for the efficient integration of lightweight computer vision algorithms into embedded mechanical systems, supporting applications such as visual odometry and Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) [5].

1. Scaramuzza D., Fraundorfer F. Visual odometry [tutorial] // IEEE robotics & automation magazine. — 2011. — Vol. 18, no. 4. — P. 80–92.
2. Robust visual inertial odometry using a direct EKF-based approach / Bloesch M., Omari S., Hutter M., and Siegwart R. // 2015 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems (IROS) / IEEE. — 2015. — P. 298–304.
3. Lowe D. G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints // International journal of computer vision. — 2004. — Vol. 60. — P. 91–110.
4. ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF / Rublee E., Rabaud V., Konolige K., and Bradski G. // 2011 International conference on computer vision / Ieee. — 2011. — P. 2564–2571.
5. Mur-Artal R., Montiel J. M. M., Tardos J. D. ORB-SLAM: A versatile and accurate monocular SLAM system // IEEE transactions on robotics. — 2015. — Vol. 31, no. 5. — P. 1147–1163.

Савельєва Катерина Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: katerina1971s@gmail.com;
 Дашко Ольга Геннадіївна,
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: OGDashko@nas.gov.ua

ВИЗНАЧЕННЯ ЗВЕДЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПУАССОНА ДЛЯ ТРИШАРОВОЇ ПАНЕЛІ

Савельєва К.В., Дашко О.Г.

У роботі розглядається прямокутна тришарова пластина – сендвіч-панель, що складається з центрального товстого шару-наповнювача товщиною h та двох тонких зовнішніх обшивок товщиною δ ($\delta \ll h$). Внутрішній шар розглядається, як товста пластина $h/R > 10$, де h – товщина пластины, R – характерний лінійний розмір. Зовнішні шари моделюються як ізотропні матеріали з однаковими властивостями, жорстко з'єднані із заповнювачем по площинах контакту. Мета роботи – аналітично визначити зведені коефіцієнти Пуассона для даної панелі у площинах xOz та yOz .

Розрахунки для панелі з ізотропним наповнювачем проведено в роботі [1]. Для ортотропного наповнювача використовуємо тензорні співвідношення, зокрема, приведемо співвідношення для σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = (1 - \nu_{xy}\nu_{yz})\bar{E}_x \varepsilon_x + (\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz})\bar{E}_y \varepsilon_y + (\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy})\bar{E}_z \varepsilon_z,$$

де $\nu_{x_i x_j}$ – коефіцієнти Пуассона, лише три з них є незалежними величинами через симетрію пружно-деформаційних співвідношень $\nu_{x_i x_j} \bar{E}_{x_j} = \nu_{x_j x_i} \bar{E}_{x_i}$. Перетворені модулі Юнга ортотропного шару визначаються як $\bar{E}_x = \nu_{yzx} E_x$, $\bar{E}_y = \nu_{xzy} E_y$, $\bar{E}_z = \nu_{xyz} E_z$, де, зокрема, $\nu_{xyz} = \left[(1 - \nu_{zx}\nu_{xz})(1 - \nu_{yz}\nu_{zy}) - (\nu_{xy} + \nu_{yz}\nu_{zx})(\nu_{yx} + \nu_{zy}\nu_{xz}) \right]^{-1}$.

Ізотропні обшивки описуються рівняннями для умов плоского напруженого стану

$$\sigma_{x1} = E_1 \varepsilon_{x1} / (1 - \nu_1^2), \quad \sigma_{y1} = \nu_1 E_1 \varepsilon_{x1} / (1 - \nu_1^2).$$

Через малість товщини зовнішніх шарів порівняно з товщиною заповнювача ми нехтуємо відносними подовженнями зовнішніх шарів вдовж координати z порівняно з деформаціями заповнювача: $\varepsilon_{z1} \approx 0$.

Для виведення рівнянь відносно зведених коефіцієнтів Пуассона ν_{zx}, ν_{zy} спочатку виділимо елемент із довільною віссю при розтягуванні у напрямку вздовж осі z в умовах плоскої деформації, поклавши $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_{y1} = 0$, і після перетворень отримаємо рівняння

$$c_{11}\nu_{zy}^3 + c_{12}\nu_{zy}^2\nu_{zx} + c_{13}\nu_{zy}\nu_{zx}^2 + c_{14}\nu_{zy}^2 + c_{15}\nu_{zx}^2 + c_{16}\nu_{zy}\nu_{zx} + c_{17}\nu_{zy} + c_{18} = 0.$$

Для виведення другого рівняння розглянемо елемент з подовжньою віссю Ox в умовах плоскої деформації $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_{x1} = 0$ при розтягуванні в напрямі осі Oz і отримаємо

$$c_{21}\nu_{zx}^3 + c_{22}\nu_{zx}^2\nu_{zy} + c_{23}\nu_{zx}\nu_{zy}^2 + c_{24}\nu_{zx}^2 + c_{25}\nu_{zy}^2 + c_{26}\nu_{zx}\nu_{zy} + c_{27}\nu_{zx} + c_{28} = 0.$$

Ця система рівнянь дозволяє аналітично визначити зведені коефіцієнти Пуассона сендвіч-панелі у вертикальних площинах симетрії.

1. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. Коэффициенты Пуассона трехслойной пластины с изотропным наполнителем. – Теоретическая и прикладная механика, 2012, № 2, С. 17–26.

Селіванов Михайло Федорович, д-р фіз.-мат. наук,
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: mfs@ukr.net

ОЦІНКА ВПЛИВУ КОНЦЕНТРАТОРІВ НАПРУЖЕНЬ ТА ТРІЩИН НА ДОВГОТРИВАЛЕ РУЙНУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Селіванов М.Ф.

В'язкопружні композитні матеріали відіграють важливу роль у сучасній промисловості завдяки поєднанню незначної питомої маси, високої міцності та здатності ефективно чинити опір багатоцикловим механічним навантаженням. Такі матеріали дозволяють створювати конструкції, які мають тривалий строк служби за мінімальної ваги, що є критично важливим у багатьох інженерних застосуваннях. Однією з ключових задач у процесі проектування є надійне передбачення моменту зародження та подальшого розвитку тріщин, які виникають у зонах локалізованих напружень.

Метою роботи було створення та апробація алгоритму моделювання напружено-деформованого стану під час росту тріщин у в'язкопружних композитних елементах конструкцій. Основними методами стали метод скінченних елементів, метод інкременталізації конститутивних рівнянь [1] та модель когезійної зони, яка дозволяє враховувати обмежену концентрацію напружень в околі вершини тріщини.

Розроблено числову реалізацію, що дозволяє моделювати як етап накопичення ушкоджень у зоні концентратора (інкубаційний період, протягом якого зберігається геометрична цілісність елемента), так і фазу повільного зростання тріщини [2], що передують динамічному її поширенню. Проведено серію числових експериментів, у яких досліджено вплив жорсткості когезійного закону, геометрії концентраторів та ортотропії властивостей матеріалу на розвиток тріщини.

Показано, що тривалість інкубаційного періоду може бути істотно збільшена при переході до більш жорсткого когезійного закону. Для пластин із круговим отвором встановлено, що збільшення радіусу отвору зменшує тривалість відтермінованого руйнування. При деякому значенні радіуса концентратора зароджена тріщина без затримки на відтерміноване руйнування переходить на динамічний етап поширення, причому цей перехід відбувається до досягнення розкриттям в концентраторі критичного значення – процес інкубації тріщини не завершено.

Відтерміноване руйнування пластини з ромбовидним отвором більшою мірою складається з квазістатичного поширення тріщини, таким чином повторюючи основні тренди для тіла з наявною тріщиною. Для оболонки картина суттєво відрізняється: на внутрішній її стороні когезійна довжина суттєво збільшилась порівняно із її значенням на зовнішній стороні. Це спостереження підкреслює вплив геометричних факторів і структурної конфігурації на часову еволюцію відтермінованого руйнування в'язкопружних систем.

1. Zocher M.A., Groves S.E., Allen D.H. A three-dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 1997. 40. № 12, P. 2267–2288.

2. Hui C.-Y., Zhu B., Long R. Steady state crack growth in viscoelastic solids: A comparative study. *J. Mech. Phys. Solids.* – 2022. 159, P. 104748.

Сенченков Ігор Костянтинович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: igor.senchenkov@gmail.com;

Червінко Ольга Петрівна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: chop497@gmail.com;

Доля Олена Вікторівна, доцент кафедри прикладної математики,
 Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна,
 e-mail: elena_367@ukr.net.

ЗАЛИШКОВИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ПРИ НАРОЩУВАННІ РІДКИМ МЕТАЛОМ

Сенченков І.К., Червінко О.П., Доля О.В.

Математична постановка задачі базується на теорії тіл, що ростуть, з використанням концепції «власного» температурно-деформаційного стану для задовольняння неklasичних граничних умов на поверхні нарощування. Термов'язкопластична поведінка матеріалу описується моделлю течії Боднера-Партома з залежними від температури властивостями. Постановка включає також універсальні балансові і кінематичні рівняння. Бічні поверхні вільні від навантаження і охолоджуються за механізмом конвективного і променевого теплообміну. Нижній торець нарощуваного циліндра гладко опертий.

Задача формулюється в осесиметричній постановці, яка передбачає одночасне наплавлення кожного шару зі сталі Ст3. Використовуються крокова за часом та ітераційна техніки. Лінеаризована на кожному кроці та ітерації задача термомеханіки розв'язується методом скінченних елементів. Досліджується залежність характеристик НДС від параметрів процесу: товщини шарів Δh , часового проміжку між їх нарощенням Δt , а також від геометрії циліндра.

На рис. 1 наведені: а – схема циліндра при торцевому нарощуванні шарами, б-г – залишкове викривлення внутрішньої поверхні в залежності від параметрів процесу.

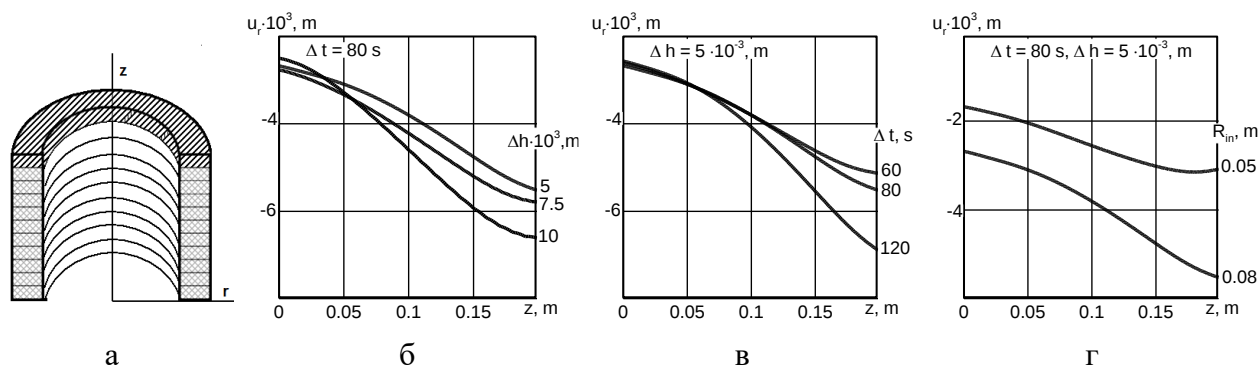


Рис.1

Аналіз показує, що максимальні напруження і пластичні деформації мають місце на бічних границях нарощених шарів і суттєво залежать від товщини і швидкості нанесення шарів.

Сенченков Ігор Костянтинович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,

e-mail: igor.senchukov@gmail.com;

Червінко Ольга Петрівна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,

e-mail: chop497@gmail.com;

Якименко Сергій Миколайович, доцент кафедри вищої математики і фізики,

Центральноукраїнський національний технічний університет, Кропивницький, Україна,

e-mail: yasm@i.ua.

КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ТВЕРДОПАЛИВНОГО РАКЕТНОГО ДВИГУНА ПРИ ДІЇ РАДІАЛЬНОГО СИЛОВОГО ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Сенченков І.К., Червінко О.П., Якименко С.М.

Розглядається НДС і вібророзігрів ракетного двигуна на твердому паливі при радіальному силовому гармонічному навантаженні при транспортуванні в горизонтальному положенні.

Двигун моделюється в'язкопружним циліндром із зіркоподібною порожниною, підкріпленням тришаровою пружною оболонкою. Схеми двигуна в перерізі і навантаження показані на рис.1.

Використовується плоска постановка задачі в'язкопружності для гармонічних коливань. Механічні властивості матеріалу заряду описуються комплексними модулями, що залежать від температури і частоти. Задача є нелінійною і розв'язується методом ітерації. Для прискорення ітераційного процесу використовується процедура Стефенса-Ейткена. Лінеаризована задача на кожній ітерації розв'язується методом скінченних елементів. Рівняння нестационарної теплопровідності інтегрується за явною схемою. На рис. 2 наведені амплітудно- і температурно-частотні характеристики при $\sigma_0=0.015\text{ МПа}$ для точки максимуму температури (т.1 на рис. 1). Тонкі лінії відповідають пружній амплітудній характеристиці ($G''=0$). Внаслідок гістерезисних механічних втрат за низької теплопровідності палива має місце суттєвий усталений розігрів навіть при малих амплітудах збудження. Залежність модулю зсуву від температури зумовлює гістерезис резонансної характеристики м'якого типу і зсув резонансу в область нижчих частот з 66 Гц до ~45 Гц.

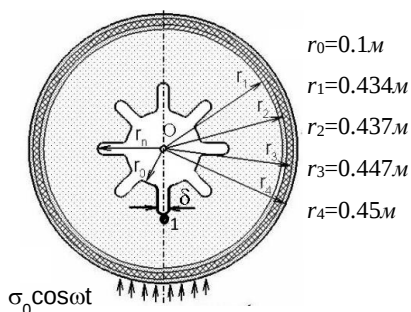


Рис.1

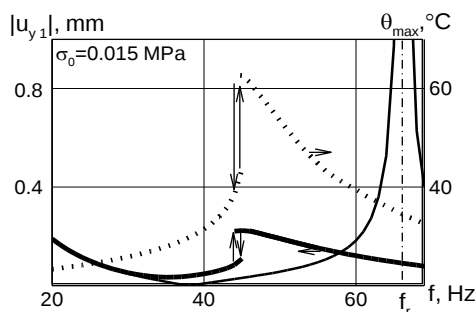


Рис.2

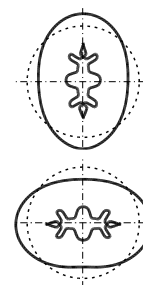


Рис.3

На рис. 3 наведена форма коливань для першого лінійного резонансу $f \approx 66\text{ Гц}$.

Визначені області параметрів навантаження, при яких максимальна температура розігріву не перевищує заданого значення при заданому часі транспортування. Такі дані можуть бути використані для оцінки термічної довговічності двигуна за температурним критерієм.

Середницька Христина Ігорівна, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
 Україна;
 e-mail: ser.kristina@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ТЕПЛОПРОВІДНОЮ ЗАКРИТОЮ ТРІЩИНОЮ

Середницька Х.І.

Дана доповідь присвячена дослідженню термопружної поведінки різнорідного біматеріалу з міжфазною теплопровідною тріщиною з урахуванням повного контакту берегів тріщини. Розглядаємо біматеріал, що складається з двох півплощин, матеріали яких наділені різними термічними і механічними параметрами. На лінії з'єднання півплощин розташована міжфазна тріщина завдовжки $2a$. На нескінченності у напрямку, перпендикулярному до міжфазної лінії, біматеріал підданий дії стаціонарного однорідного теплового потоку q і однорідних стискальних зусиль p , під дією яких береги тріщини контактують по всій довжині $x \in [-a, a]$ без тертя. Вважаємо, що передача тепла між берегами тріщини відбувається у поперечному напрямі, і теплопровідність тріщини прямо пропорційна контактному тиску її берегів $P(x)$ з коефіцієнтом пропорційності λ , що характеризує теплопровідність берегів тріщини.

Сформульовану задачу термопружності зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно стрибка температури між берегами тріщини $\gamma(x)$:

$$\lambda P(x) \cdot \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad \gamma(\pm a) = 0, \quad |x| < a, \quad (1)$$

де контактний тиск $P(x)$ визначається через стрибок температури $\gamma(x)$ наступним чином:

$$P(x) = p + \frac{q}{G^*} \left[\frac{\beta \eta^+}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(t) dt - 2(\eta^- + \beta \eta^+) \gamma(x) \right], \quad |x| < a, \quad (2)$$

і відповідно параметри λ , β , η^+ , η^- , G^* є приведеними параметрами, які визначаються механічними і термічними властивостями матеріалів [1].

Враховуючи у рівнянні (1) рівність (2), отримано нелінійне сингулярне інтегро-диференціальне рівняння відносно стрибка температури, яке розв'язано числово.

Зауважимо, що значення стискальних зусиль при яких береги тріщини контактують на всій її ділянці є наперед невідомими і мають бути більші за деяке порогове значення $p > p_{cr}$. Порогові значення зусиль p_{cr} , при яких тріщина цілком закрита визначено з умови $P(0) = 0$.

На основі отриманого числового розв'язку проаналізовано розподіл контактного тиску і стрибка температури на ділянці тріщини, а також визначено коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень в залежності від прикладеного навантаження. Числові розрахунки проведено для біматеріалу, компонентами якого є сплав нікелю та нержавіюча сталь.

1. Середницька Х. Задача термопружності для закритої міжфазної теплоізолюваної щілини в різнорідному біматеріалі // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – С. 69-80.

Сохацький Анатолій Валентинович, доктор технічних наук, професор
 Університет митної справи та фінансів, Дніпро, Україна,
 e-mail: Sokhatsky_anatoly@ukr.net

Дреус Андрій Юлійович, доктор технічних наук, професор
 Дніпровський національний університет імені Олеся Гончарова, Дніпро, Україна
 e-mail: dreus.andrii@gmail.com

ДО ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ

Сохацький А.В., Дреус А.Ю.

Методи моделювання турбулентних течій, з певною мірою умовності можна розділити на три групи: підходи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier - Stokes - RANS); два класичних підходи - пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation - DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation - LES); гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів для різних областей течії.

Класичні вихоророзрізняючі підходи є найбільш досконалими. Це пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation - DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation - LES). Метод DNS базується на безпосередньому прямому числовому розв'язуванні тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса з розрізненням усіх просторово-часових масштабів турбулентності. Він ґрунтується на фізичних принципах аеродинаміки і повністю вільний від емпіричних припущень.

У рамках методу LES ті ж рівняння розв'язуються безпосередньо після їх попередньої просторової фільтрації. Це дозволяє виключити з розгляду частину просторово-часових масштабів. Проведена операція дозволяє значно понизити вимоги до просторово-часового розрізнення. Таким чином понижуються вимоги до необхідних обчислювальних ресурсів.

Для урахування впливу відфільтрованих ("підсіткових") масштабів турбулентності притягуються ті або інші напівемпіричні моделі.

В науковій літературі для підкреслення кардинальних відмінностей методу LES від підходів, що використовуються для замикавання RANS, їх називають "підсітковими".

На сьогодні найбільш поширеними підходами є методи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds Averaged Navier - Stokes - RANS). Вони замикаються за допомогою тієї або іншої напівемпіричної моделі турбулентності. Відомо, що RANS моделі не здатні забезпечити прийнятну для практики точність розрахунку течій з великими відривними зонами. LES підхід вимагає надмірно великих обчислювальних витрат, ледве частка яких пов'язана з розрахунком пристінної частини приєднаних примезових шарів, які містять енергонесучі вихори малих розмірів.

До третьої групи слід віднести гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів в різних областях течії. Вони є найбільш розповсюдженими для практичного використання, виходячи з можливостей обчислювальної техніки

Концепція гібридних моделей полягає в спробі побудови комбінованих моделей, які функціонували б як RANS в одних і як LES в інших областях течії. Така можливість відкривається завдяки формальній схожості рівнянь Рейнольдса і рівнянь LES. Проте шляхи реалізації цієї можливості можуть бути абсолютно різноманітними. Це пояснюється відмінністю різних форм гібридних моделей.

Найпоширенішим методом став метод моделювання від'єднаних вихорів - Detached Eddy Simulation або DES. В доповіді приводяться результати математичного моделювання турбулентних течій з використанням гібридної DES моделі. Обговорюються її переваги та недоліки.

Стеблянюк Павло Олексійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Інститут механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: caf-vmi@ukr.net

РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК

Стеблянюк П.О.

Існуючі дослідження в галузі теорії пластин та оболонок можна виокремити у два напрямки: перший напрям – комбіновані аналітичні та напіваналітичні методи, які ґрунтуються на континуальній моделі розрахунку, та, другий напрям, який базується на дискретному поданні розрахункової моделі, з метою використання добре відомих числових методів. Обидва напрямки мають в своєму арсеналі потужні програмні комплекси, проте при практичній реалізації існуючих методів (для складних оболонкових конструкцій або при наявності пластичних деформацій) виникає потреба покращувати отримані результати. Одна з можливостей базується на ідеї підвищення точності обчислень за рахунок використання двовимірних сплайн-функцій [1].

Повну систему рівнянь складають рівняння рівноваги тонкостінного елемента конструкції, фізичних співвідношень та геометричних рівнянь. В якості фізичних використовуються співвідношення теорії процесів деформування середньої кривизни [2]. Температурне поле будується виходячи з рішення нестационарного рівняння теплопровідності з урахуванням можливого тепловиділення у процесі навантаження оболонки (зв'язна задача). За допомогою цих рівнянь при певних граничних умовах розшукуються двадцять невідомих величин, які є функціями координат x , y серединної поверхні. У загальному випадку повна система рівнянь у частинних похідних першого порядку записана у векторному вигляді, де через $\vec{W}$ позначено вектор, до складу якого входять усе невідомі [1].

Основними невідомими є три складові вектора переміщення та п'ять питомих зусиль, які виникають в серединній поверхні оболонки

$$W_1 = U_1, \quad W_2 = U_2, \quad W_3 = U_3, \quad W_4 = Q_1, \quad W_5 = Q_2, \quad W_6 = T_1, \quad W_7 = T_2, \quad W_8 = S.$$

Вони визначаються при розв'язанні системи відповідних алгебраїчних рівнянь, записаних у 16 вузлах сітки двовимірного В-сплайна за допомогою ітераційної процедури методу Зейделя і мають третій порядок точності по координатах. Після їх обчислення по явним формулам визначаються допоміжні дванадцять невідомих величин. Це будуть моменти, деформації, зсуви, кути поворотів, кривизни та кручення

$$W_9 = M_1, \quad W_{10} = M_2, \quad W_{11} = H, \quad W_{12} = \varepsilon_1, \quad W_{13} = \varepsilon_2, \quad W_{14} = \gamma_1, \quad W_{15} = \gamma_2,$$

$$W_{16} = \omega_1, \quad W_{17} = \omega_2, \quad W_{18} = \chi_1, \quad W_{19} = \chi_2, \quad W_{20} = \tau.$$

1. Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems // Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal-Plasticity. – Problems, ETS-Encyclopedia of Thermal Stresses, Shpringer Verlag. 2014. No. 7. P. 630–636.

2. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность. – Киев: Наукова думка, 1987. – 264с.

Сторожук Євген Анатолійович, член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: stevan@ukr.net;
 Серафимович Роман Вікторович, аспірант,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: serafymovychr@gmail.com;
 Чернишенко Іван Семенович, член-кор. НАН України, доктор техн. наук, проф.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: desc@inmech.kiev.ua

РОЗРАХУНОК ЗА МЕЖЕЮ ПРУЖНОСТІ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ТРИШАРОВІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Сторожук Є.А., Серафимович Р.В., Чернишенко І.С.

Шаруваті циліндричні оболонки широко застосовуються в авіа- та суднобудуванні, космічній техніці, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях промисловості. В багатьох випадках ці елементи за конструктивними або технологічними міркуваннями мають отвори і вирізи самої різноманітної форми. При розрахунку шаруватих елементів конструкцій з концентраторами напружень за дії навантажень значної інтенсивності необхідно враховувати як дійсні умови експлуатації, так і реальні властивості матеріалів (пластичність) та особливості їх деформування (поперечний зсув). Дослідження напружено-деформованого стану шаруватих структур у даний час виконують із застосуванням двох підходів [1]: неперервно-структурного і дискретно-структурного. При побудові теорій першого підходу розв'язувальні рівняння отримуються із залученням гіпотез до всього пакету шарів в цілому. В другому підході використовуються теорії, при розробці яких кінематичні гіпотези застосовуються до кожного шару окремо.

В роботі з використанням дискретно-структурного підходу розроблено чисельну методику дослідження деформування за межею пружності податливої на поперечний зсув тришарової циліндричної оболонки, ослабленої круговим отвором, за дії статичного навантаження підвищеної інтенсивності. Основні рівняння отримані з принципу можливих переміщень на основі співвідношень теорії непологих оболонок і гіпотези ламаної лінії [2]. Згідно з цією гіпотезою нормальні переміщення (прогини) всіх шарів приймаються однаковими, а тангенціальні переміщення в межах кожного шару змінюються лінійно за товщиною. Деформування обшивок описується з використанням гіпотез Кірхгофа–Лява, а заповнювача – гіпотез Тимошенка. За розв'язувальні функції прийняті переміщення серединної поверхні заповнювача і кути повороту його нормалі. Зв'язок компонентів тензорів напружень і деформацій для заповнювача записано згідно закону Гука, а для обшивок – на основі теорії малих пружнопластичних деформацій [3]. Поставлена фізично нелінійна крайова задача розв'язується за допомогою методу додаткових напружень і модифікованого методу скінченних елементів. Досліджено вплив пластичних деформацій матеріалу обшивок і деформацій поперечного зсуву заповнювача на концентрацію напружень навколо кругового отвору в тришаровій циліндричній оболонці за дії осьових розтягувальних зусиль.

1. Piskunov V.G. An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems / V.G. Piskunov // Mech. Compos. Mater. – 2003. – 39, No. 1. – P. 1–16.
2. Баженов В.А. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / В.А. Баженов, Е.А.Гоцуляк, А.И.Оглобля, Ю.Л.Динкевич, О.В.Герашенко. – К.: Будівельник, 1992. – 136 с.
3. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості / М.С. Можаровський. – К.: Вища школа, 2002. – 308 с.

Timokha Alexander, Academician of the NAS of Ukraine,
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: atimokha@gmail.com

REDUCED ORDER MODELLING CONCEPT IN SURFACE WAVE PROBLEMS

Timokha A.

Sloshing of different kind with free surface is discussed within the framework of the Reduced Order Modelling concept [1] when the free-surface nonlinearity plays the key role in preventing an infinite amplitude response. The concept makes it possible to reduce, in mathematically and physically correct way, the original boundary problem to systems of nonlinear ordinary differential equation of finite dimension. Advantages and backdrawns of the method are illustrated for liquid drop dynamics [2] and classical problems on nonlinear resonant liquid sloshing in rigid tank [3]. A particular conclusion consists of requirement in learning the derived systems to account for specific features, e.g., non-zero damping [4,5] in the hydromechanical system.

1. Ahmed S.E., Pawar S., San O., Rasheed A., Iliescu T., Noack D. On closures for reduced order models - a spectrum of first-principle to machine-learned avenues / S.E. Ahmed // *Physics of Fluids*.- 2021.- 33 (9).- Article 091301.- P. 1-25.
2. Timokha A. Freely oscillating drop / A. Timokha // In: Timokha, A. (Ed.) *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*. Springer, Cham, 2025, p. 171-186.
3. Timokha A. Understanding sloshing as complex asymptotically reduced dynamical system / A. Timokha // In: B. Scheichl (ed.) *Interfacial Flows—The Power and Beauty of Asymptotic Methods*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 615, Springer Nature Switzerland AG, 2025, p. 29-78
1. 4. Bäuerlein B., Avila K. Phase lag predicts nonlinear response maxima in liquid-sloshing experiments / B. Bäuerlein // *Journal of Fluid Mechanics*.- 2021.- 925, A22.- P. 1-29.
2. 5. Miliaiev A., Timokha A. Viscous damping of steady-state resonant sloshing in a rectangular tank / A. Miliaiev // *Journal of Fluid Mechanics*.- 2023.- 965, R1.- P. 1-12.

Токовий Юрій Владиславович, член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
Львів, Україна, e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua;
 Кульчицький-Жигайло Юрій Романович, аспірант
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
Львів, Україна, e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua;

АНАЛІЗ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ БАГАТОШАРОВИХ СФЕРИЧНИХ ТІЛ

Токовий Ю. В., Кульчицький-Жигайло Ю. Р.

Розглянуто крайові задачі теорії пружності та термопружності для багатошарової порожнистої сферичної посудини, що складається з ідеально з'єднаних неперервно неоднорідних шарів, виготовлених з матеріалів, механічні та теплофізичні властивості яких можуть довільно змінюватися за товщиною шару. Напружено-деформований стан виникає у посудині внаслідок тисків та температур, рівномірно розподілених по внутрішній та зовнішній поверхнях. Розв'язки задач побудовано з використанням концепції, яка інтерпретує багатошаровий композит, як єдине неоднорідне тіло з кусково-змінними властивостями [1]. Цю концепцію застосовано у поєднанні з методом безпосереднього інтегрування [2], алгоритм застосування якого модифіковано спеціальним чином для уникнення використання апарату узагальнених похідних. У результаті використання такого підходу вихідні крайові задачі теорії пружності чи термопружності, що описуються рівняннями з кусково-змінними коефіцієнтами зведено до розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду. Його розв'язок побудовано за допомогою методу резольвентного ядра у вигляді явної залежності від прикладених силових та теплових навантажень. На основі тестових задач показано, що розподіли температури, радіального і колового напружень уздовж стінки посудини, складеної з однорідних шарів, знайдені за допомогою запропонованого методу, добре узгоджуються з відповідними розподілами, отриманими за допомогою відомих методів, однак, зі значно кращою ефективністю стосовно точності обчислень.

Модифікований метод безпосереднього інтегрування використано також для розв'язання задач теорії пружності чи термопружності, для яких аналітичні розв'язки є невідомі. Розглянуто багатошарову сферичну посудину, виготовлену з градієнтного композитного матеріалу, структура якого містить певну кількість репрезентативних комірок, що складаються з двох однорідних ізотропних шарів. Процентний вміст кожного матеріалу в різних репрезентативних комірках може різнитися. Для великої кількості комірок, задачі аналізувалися за допомогою двох концепцій. Перша передбачає незалежний розгляд реальних сферичних шарів. Друга описує градієнтний композит за допомогою методу гомогенізації з мікролокальними параметрами. Це призводить до математичної моделі, в якій властивості матеріалу поперек стінки описуються неперервними функціями радіальної координати. Ці функції враховують механічні і термофізичні властивості компонентів репрезентативної комірки та змінність об'ємної частки матеріалу першого типу за товщиною. Задачі для гомогенованої посудини розв'язано стандартним методом безпосереднього інтегрування.

Результати досліджень показали, що запропонований метод гомогенізації адекватно описує термопружну поведінку сферичних посудин із розглянутою структурою. Запропонований підхід дозволяє коректно обчислити не тільки усереднені характеристики, але й характеристики, що залежать від вибору компонента в репрезентативній комірці.

1. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
2. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 329 p.

Трач Володимир Мирославович, доктор технічних наук, професор,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
 e-mail: v.m.trach@nuwm.edu.ua;
 Хоружий Микола Миколайович, кандидат технічних наук, доцент,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
 e-mail: m.m.khoruzhyi@nuwm.edu.ua

НЕТОНКІ АНІЗОТРОПНІ ЦИЛІНДРИЧНІ ОБОЛОНКИ З ШАРОМ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ ПІД БОКОВИМ ТИСКОМ

Трач В.М., Хоружий М.М.

Тонкостінні конструкції з композитних матеріалів широко застосовуються в сучасній техніці, зокрема в авіації та ракетобудуванні, завдяки поєднанню малої ваги й високої міцності. Проте їх несуча здатність суттєво знижується під впливом високих температур. Заміна традиційних композитів на термостійку кераміку має обмеження через її крихкість. Однак перспективним рішенням є функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) [1], які поєднують кераміку та метал із поступовим переходом властивостей, забезпечуючи водночас термостійкість і механічну надійність. Істотний інтерес з погляду практичних вимог до розрахунку та проектування таких композитних конструкцій становить аналіз впливу структури пакета за товщиною, геометричних і механічних параметрів шарів, схем армування та інших факторів на характеристики, що визначають напружено-деформований стан (НДС) шаруватих елементів конструкцій.

У роботі представлено підхід до розв'язання геометрично нелінійної задачі про напружено-деформований стан нетонких анізотропних циліндричних оболонок із шаром функціонально-градієнтного матеріалу за використання уточненої теорії типу Тимошенка – Мідліна [2].

Задачу нелінійного деформування симетрично завантажених нетонких анізотропних оболонок зведено до системи з десяти неоднорідних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші зі змінними коефіцієнтами та однорідними граничними умовами. Для лінеаризації рівнянь, що описують нелінійний НДС, використано метод Ньютона – Канторовича. Розв'язання нелінійної крайової задачі здійснено числовим методом Кутта – Мерсона з дискретною ортогоналізацією за Годуновим. Чисельну методику розрахунку НДС композитних оболонок із матеріалу з однією площиною пружної симетрії реалізовано у вигляді пакета прикладних програм для ПК.

За допомогою розробленої методики виконано чисельні розрахунки шаруватой циліндричної оболонки, що складається з волокнистого композиту, укладеного під певним кутом до твірної, та шару з функціонально-градієнтного матеріалу, під дією бокового тиску [3]. Наведено залежності впливу кута повороту головних напрямів пружності композиту на параметри напруженого стану. Також проаналізовано ефект збільшення кількості шарів оболонки.

1. Shen, Hui-Shen. (2009). Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York.

2. Трач, В.М., Подворний, А.В., & Хоружий, М.М. (2019). Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. Київ: Каравела.

3. Semenyuk, N.P., Trach, V.M., & Podvornyi, A.V. (2020). Stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells under thermal power load, protected by the functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures*, (104), 192–206. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105.165-178>.

Трач Володимир Мирославович, доктор техн. наук, професор
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
 e-mail: trach-vm@ukr.net
 Подворний Андрій Володимирович, доктор техн. наук, професор
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
 e-mail: a.v.podvorny@nuwm.edu.ua
 Жукова Наталія Борисівна, кандидат фіз.-мат. наук, старший наук. співробітник
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: zukowa_n@ukr.net

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНИХ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ЗМІННИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Трач В.М., Подворний А.В., Жукова Н.Б.

Товстостінні циліндричні оболонки є ключовими елементами багатьох інженерних конструкцій, таких як трубопроводи, резервуари, корпуси космічних апаратів та інших споруд, що експлуатуються в умовах силового навантаження або температурного впливу. Дослідження їх напружено-деформованого стану (НДС) набуває особливої актуальності при врахуванні змінного в коловому напрямку навантаження, яке часто виникає в реальних умовах експлуатації. Такі навантаження, спричинені, наприклад, нерівномірним розподілом тиску, можуть суттєво впливати на міцність, стійкість та довговічність конструкції.

Аналіз НДС товстостінних циліндричних оболонок у просторовій постановці [1] дозволяє найповніше врахувати характер деформування та взаємодії напружень, що не завжди можливо забезпечити в рамках класичної чи уточненої теорій [2, 3]. Використання просторового підходу є необхідним для забезпечення функціонування конструкцій, особливо в умовах, коли відмова може призвести до значних економічних або екологічних наслідків.

В представленій роботі, автори пропонують підхід до розв'язання задачі про НДС шаруватой анізотропної циліндричної оболонки, в просторовій постановці, яка знаходиться в полі дії розподіленого бокового тиску, змінного в коловому напрямку. Матеріалом, з якого виготовлена оболонка, є волокнистий композит – боропластик. Анізотропія пружних властивостей пов'язана з неспівпадінням його власних осей ортотропії з криволінійною системою координат циліндричної оболонки.

Розроблений підхід до розв'язку системи диференціальних рівнянь НДС тривимірної теорії пружності анізотропного тіла, отриманої на основі модифікації варіаційного принципу Ху-Васідзу. Підхід включає в себе процедуру розділення змінних з використанням методу Бубнова-Гальоркіна. Відповідно їй, всі компоненти НДС системи розкладаються у подвійні ряди Фур'є так, щоб за координатою уздовж твірної оболонки вони задовольняли граничним умовам на торцях, а у коловому напрямку була врахована їх періодичність. Чисельний розв'язок, отриманої одновимірної системи однорідних диференціальних рівнянь, проводиться при використанні методу дискретної ортогоналізації.

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачі теорії упругости неоднородных тел. / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

2. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. / Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.

3. Трач В.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. / Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. – К.: Каравела, 2019. – 274 с.

Улітко Ігор Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: igorulitko@knu.ua;

Борисейко Олександр Віталійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: boryseiko@knu.ua;

Лебедева Ірина Валеріївна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: lebedyevaiv@knu.ua;

Курилко Олександр Борисович, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

email: alexandr.kurylko@knu.ua

РЕЗОНАНСНІ ВЛАСТИВОСТІ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ГІРОСКОПІЧНОГО СЕНСОРА НА ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЯХ ЗСУВУ

Улітко І.А., Борисейко О.В., Лебедева І.В., Курилко О.Б.

В інерційних навігаційних системах, які в процесі експлуатації зазнають значних ударних та вібраційних впливів, пропонується застосовувати твердотільні гіроскопічні сенсори на поверхневих (ПАХ) чи то об'ємних (ОАХ) акустичних хвилях. Ці висодобротні перетворювачі мегагерцівського акустичного діапазону мають усі ті переваги стосовно завадостійкості, що притаманні високочастотним фільтрам. Іншою важливою рисою є те, що сенсори на ПАХ чи то ОАХ функціонують за рахунок явища п'єзоефекту, і таким чином, не потребують якихось додаткових засобів для збудження або прийому сигналу, окрім поверхневих електродних покриттів кристалу, що спрощує і суттєво здешевлює процес масового виробництва подібних сенсорів.

Розроблювана математична модель сенсора на об'ємних хвилях зсуву ґрунтується на властивостях Коріолісової дисперсії гармонічних хвиль в пружному тілі та на властивостях п'єзоефекту шарі з поздовжньою поляризацією. Передбачається, що вісь обертання шару є перпендикулярною до його плоских електродованих лицевих граней, на які подається однорідне збуджуюче електричне поле. Розрахункова амплітудно-частотна характеристика

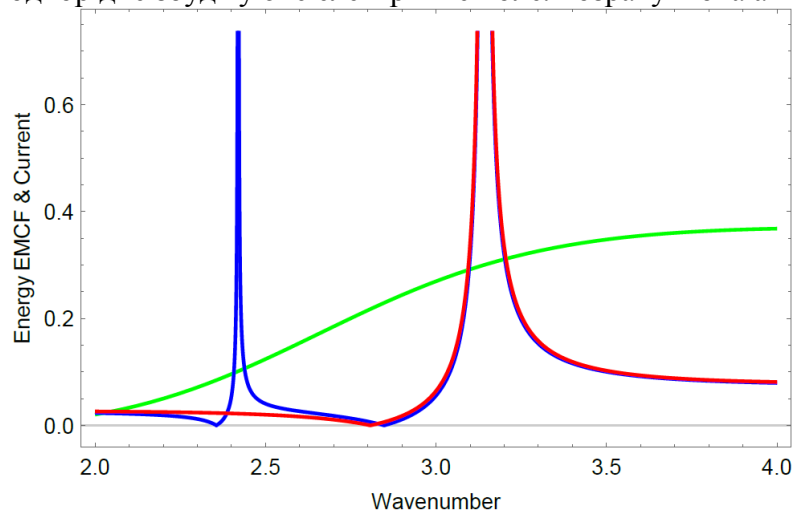


Рис.1

(Рис.1) на первинній (червона крива) та сенсорній (синя крива) модах демонструє задовільні для практики параметри гіроскопічного сенсора. Так, при значенні номованої кутової швидкості 0.01 на першому основному резонансі частота сенсорної моди складає 0.78 від збуджуваної частоти, а ефективність перетворювача за енергетичним критерієм (зелена крива), $KEM3 \ k_E^2$ [1], складає близько 24% для первинної моди та близько 1.5% для сенсорної моди у порівнянні зі статичним зсувним $KEM3 \ k_{f5}^2$.

1. Ulitko A.F. On the theory of electromechanical conversion of energy in nonuniformly deformed piezoceramic bodies // Prikladna Mekhanika, - 1977, - V.13, - No10, -P.115-123

Ushakova Vira Serhiivna, Ph.D. (Phys.-Math.), sen.sci.researcher, S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, e-mail: reznikvera18@gmail.com
 Ushakov Oleksii Viktorovych, Deputy head of the center, The Ukrainian Scientific and Research Institute of Special Equipment and Forensic Expertise of the Security Service of Ukraine, Kyiv, Ukraine, e-mail: nddkr_ictc@ssu.gov.ua

MATHEMATICAL PROCESSING OF EXPERIMENTAL DATA IN VISCOELASTICITY PROBLEMS

Ushakova V.S., Ushakov O.V

The problem of identifying creep functions and determining the unknown constants within them is one of the most important tasks in developing any theory and is the subject of many studies [1, 2]. The accuracy of determining these constants strongly depends on how accurately the discretely given experimental data are approximated.

One of the most widely used methods for approximating experimental data is the least squares method, which is based on finding the minimum of the quadratic deviation of experimental data from calculated values. Let's consider the method in more detail. Let $y = f(x)$ be the function that approximates the experimental data $A_1(x_1; y_1); A_2(x_2; y_2), \dots, A_n(x_n; y_n)$. To estimate the accuracy of the approximation, we find $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ and the differences $e_1 = y_1 - f(x_1), e_2 = y_2 - f(x_2), \dots, e_n = y_n - f(x_n)$ between the experimental and functional values.

Cubic splines are an effective method for approximating experimental data of creep curves under torsion. The approximation can contain as many curves as necessary for effectively approximating the data with the experimental curve. The points where one curve changes to another are called knots [1]. The method assumes that the approximating function must pass through all experimental points. In this case, the creep function $\varepsilon^c(t)$, which approximates the experimental data, has the form:

$$\varepsilon^c(t) = \varepsilon_i + \left[\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2k_i + k_{i+1}) \right] (t - t_i) + \frac{k_i}{2} (t - t_i)^2 + \frac{k_{i+1} - k_i}{6h_i} (t - t_i)^3; t \in [t_i; t_{i+1}], \quad h_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (1)$$

Here, k_i are the spline coefficients determined by the condition of continuity of the first derivative at points t_i , ($i = \overline{2, L-1}$) and some boundary conditions at the ends of the segment that defines the approximating function $\tilde{\varepsilon}^c(t)$; ε_i are the tabulated values of the approximating function at points t_i . [2].

Smoothing cubic splines eliminate the disadvantage associated with the approximation of data that do not correspond to real processes. The methodology for constructing smoothing cubic splines is based on the assumption that the function does not necessarily pass through all tabulated points. The influence of points is reduced by introducing weight functions $p_i \geq 0$. Consider the cubic spline of the form: $J[\tilde{\varepsilon}^c(t)] = \int_{t_1}^L |\tilde{\varepsilon}^c(t)''|^2 dt + \sum_{i=1}^L \frac{[\tilde{\varepsilon}^c(t_i) - \varepsilon_i]^2}{p_i}$. (2)

In formula (2), it is assumed that the smaller the value of p_i , the closer $\tilde{\varepsilon}^c(t_i)$ is to the tabulated ε_i , and for $p_i = 0$, the term will have a symbolic character, and $\tilde{\varepsilon}^c(t_i) = \varepsilon_i$.

1. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Reznik V.S. Calculation of creep strains of the thin-walled tubular members made of linear viscoelastic materials under tension and torsion // Int. Appl. Mech., 2022. – Vol. 58, N2. – P. 160-169.
2. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Reznik V.S. Analysis of creep strains and stress relaxation in thin-walled tubular members made of linear viscoelastic materials. 1. Superposition of shear and volume creep // Int. Appl. Mech., 2020. - Vol 56, №2. - 156-169.

Фесенко Ганна Олександрівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна,
 e-mail: fesenko@onu.edu.ua
 Процеров Юрій Сергійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна,
 e-mail: protserov@onu.edu.ua

УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Фесенко Г.О., Процеров Ю.С.

Пружний півпростір $a < r < \infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $0 < z < \infty$ з коефіцієнтом Пуассона μ та модулем зсуву G наскрізь ослаблений круговим жорстким включенням, зчепленим з півпростором. По грані півпростору діє стискальне осесиметричне гармонічне навантаження $p(r, t) = P(r)e^{-i\omega t}$. Необхідно знайти амплітуди переміщень точок пружного півпростору $u_r(r, z) \equiv u(r, z)$, $u_z(r, z) \equiv w(r, z)$, що задовольняють осесиметричним рівнянням руху

$$r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] - r^{-2} u(r, z) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial r \partial z} = -k_1^2 u(r, z),$$

$$r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \right] = -k_2^2 w(r, z),$$

де $k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$ – хвильові числа, c_1, c_2 – швидкості розповсюдження поздовжньої та поперечної хвилі відповідно, $\kappa = 3 - 4\mu$, та крайовим умовам

$$u_r(a, z) = 0, \quad u_z(a, z) = 0, \quad \sigma_z(r, 0) = -P(r), \quad \tau_{rz}(r, 0) = 0.$$

Після введення безрозмірної системи координат $\rho = a^{-1}r$, $\xi = a^{-1}z$ та позначення переміщень через $u(r, z) = U(\rho, \xi)$, $w(r, z) = W(\rho, \xi)$ застосовано інтегральне перетворення Вебера за змінною ρ . В результаті отримано одновимірну неоднорідну крайову задачу, записану у векторній формі

$$L_2 \mathbf{y}(\xi) \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}''(\xi) + \lambda \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}'(\xi) - (\lambda^2 \mathbf{P} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{f}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (1)$$

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \lambda \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{y}(0) + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{y}'(0) = \boldsymbol{\gamma},$$

де $\mathbf{y}(z) = (U_\lambda(\xi) \quad W_\lambda(\xi))^T$ – шуканий вектор трансформант переміщень, вектор $\mathbf{f}(\xi)$ правої частини рівняння містить невідому функцію, що має зміст дотичного напруження, $\mathbf{I}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{K}, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ – відомі постійні матриці розмірності 2×2 , $\boldsymbol{\gamma}$ – відомий вектор.

Розв'язок задачі (1) побудовано у формі

$$\mathbf{y}(\xi) = \int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}(\xi, \eta) \mathbf{f}(\eta) d\eta + \mathbf{Y}_-(\xi) \mathbf{C},$$

де $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \eta)$ – фундаментальна матриця-функція рівняння (1), $\mathbf{Y}_-(\xi)$ – спадаючий розв'язок відповідного (1) однорідного матричного рівняння, побудовані із застосуванням матричного диференціального числення, $\mathbf{C}$ – вектор констант, знайдений із крайових умов задачі (1). Інтегральне рівняння отримано після задовільнення нереалізованої у процесі розв'язання крайової умови, його розв'язок знайдено методом ортогональних поліномів.

Дослідження виконано за підтримки грантів “RoyalSocietyWolfsonFellow” та Horizon 2020 Grant 101008140 EffectFact “Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing, theory, numerical methods and impactful applications”.

Хапко Богдан Степанович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
Україна,
e-mail: bogdan.khapko@gmail.com

НЕСТІЙКІСТЬ КОНТАКТУ РУХОМИХ ТІЛ ЗА ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ЇХ ПОВЕРХНЕВОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Хапко Б.С.

Досліджено явище термопружної нестійкості взаємодії двох тіл, які моделюються пружним та жорстким півпросторами, що ковзають вздовж лінії контакту під дією перпендикулярно до неї прикладеного на безмежності рівномірного тиску, через теплопровідний прошарок (покриття) на поверхні розмежування тіл.

Верхнє тіло з покриттям є теплопровідним та пружним і ковзає по нижньому з заданою швидкістю. Матеріал верхнього тіла однорідний та ізотропний. Нижнє тіло абсолютно жорстке та не проводить тепло (теплоізолятор). Прошарок анізотропний та тонкий враховується граничною умовою [1]. На поверхні контакту верхнього і нижнього тіла виділяється тепло, кількість якого пропорційна швидкості руху верхнього тіла відносно нижнього, тиску прикладеного до верхнього тіла на некінченості та коефіцієнту тертя.

Задаємо періодичне збурення температури, яке задовольняє рівнянню теплопровідності та зникає на нескінченності в напрямку перпендикулярному до лінії розмежування тіл [2].

Підставивши збурення температури у рівняння теплопровідності знаходимо розподіл температури у верхньому тілі.

Визначаємо термопружний потенціал переміщень зумовлений температурою верхнього тіла та нормальне напруження на границі розмежування тіл.

Підставляючи отримані температуру та напруження в граничну умову [1] отримаємо характеристичне рівняння для визначення експоненційного коефіцієнта часу.

Проведено числовий аналіз отриманих результатів та встановлено наступне:

- при зростанні коефіцієнта тертя система переходить у нестійкий стан при меншій швидкості ковзання;
- із збільшенням коефіцієнта тертя температура збільшується і прямує до нуля в напрямку перпендикулярному до довжини періоду збурення на нескінченності;
- збільшення значення коефіцієнта тертя приводить до збільшення максимальних значень напружень вздовж періоду збурення і вони мають коливний характер відповідно до збурення температури на границі;
- напруження зростають зі зростанням значення коефіцієнта тертя та прямують до нульового значення на нескінченності вздовж напрямку перпендикулярного до періоду збурення;
- контактна пара буде стійкою зі зростанням значення приведеної температуропровідності прошарку за більшої швидкості ковзання;
- збурення зростатимуть швидше в часі та система перейде у нестійкий стан зі збільшенням періоду збурення та швидкості ковзання.

1. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл / Я.С. Підстригач // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872-874.

2. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear // Ibid. – 1972. – 19. № 2. – P. 155-159.

Харитонов Олексій Михайлович кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: kharytonov@knu.ua;

Куценко Олексій Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: alex_kutz@knu.ua;

Куценко Анастасія Григорівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна,

e-mail: kutsenko@nubip.edu.ua

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ КОМБІНУВАННЯ УЧАСТІ ДВИГУНІВ ВЕЛИКОЇ ТА МАЛОЇ ТЯГИ ПРИ ПЕРЕЛЬОТАХ ЗЕМЛЯ-МАРС

Харитонов О.М., Куценко О.Г., Куценко А.Г.

Реалізація пілотованої експедиції на Марс є однією з найбільш актуальних задач сучасної космонавтики [1]. До пілотованих міжпланетних перельотів висуваються надзвичайно жорсткі вимоги, пов'язані з необхідністю максимально ефективного виконання перельотів за мінімальний час. Концепція марсіанської місії, прийнята NASA, передбачає використання в якості основних рушійних систем ядерних ракетних двигунів типу NERVA. При цьому ядерний реактор може використовуватися і як джерело теплової енергії для двигунів великої тяги і, разом з відповідним перетворювачем енергії, - як джерело електричної енергії для живлення двигунів малої тяги [1,2]. Таке поєднання дозволяє суттєво прискорити перельоти. Зокрема, в роботі [2] розглядається переліт Земля-Марс за 45 днів.

В роботі розглянуто задачу комплексної оптимізації траєкторій, законів керування і параметрів при здійсненні міжпланетних перельотів космічних апаратів, обладнаних рушійними системами дворежимними силовими установками, здатними працювати як двигуни великої або як двигуни малої тяги. Основна увага приділяється розробці алгоритму простої інженерної оцінки умов, за яких комбінування участі двигунів малої і великої тяги при формуванні міжпланетної траєкторії є оптимальним. При розрахунку оптимальної траєкторії припускається, що вона складається з трьох ділянок (дві планетоцентричних та геліоцентрична ділянки). Планетоцентричні ділянки формуються за рахунок імпульсів великої тяги. Рух на таких ділянках відбувається по гіперболічних орбітах з асимптотичними швидкостями $\vec{v}_\infty^e, \vec{v}_\infty^m$, відповідно, для планети старту і призначення. Рух на геліоцентричній ділянці здійснюється за допомогою більш економічного двигуна малої тяги. Основна задача полягає в оптимізації розподілу затрат палива на виконання маневрів великої і малої тяги, що зводиться до оптимального вибору векторів $\vec{v}_\infty^e, \vec{v}_\infty^m$. Комбінування участі двигунів великої та малої тяги буде виправданим, якщо маса зекономленого за рахунок участі двигуна малої тяги палива перевищить масові затрати на обладнання, що забезпечує генерування малої тяги.

В роботі отриманий аналітичний вираз, який представляє масу корисного навантаження, що доставляється на кругову ареоцентричну орбіту, як функцію компонентів векторів $\vec{v}_\infty^e, \vec{v}_\infty^m$. На основі цієї формули отримані попередні оцінки тривалості перельоту, починаючи з якої комбінування участі двигунів великої та малої тяги стає оптимальним.

1. NASA approves nuclear-rocket prototype to travel to Mars in just 45 days, InspecNet, <https://inspenet.com/en/noticias/nasa-approves-nuclear-rocket-prototype-to-travel-to-mars-in-just-45-days>, 2025.

2. Gosse R., Nuclear Wave Rotor Bi-Modal Cycle for In – Space Propulsion / R. Gosse, G. Osborne, H. Mahmood, S. K. Burrows, S. Roy, J. Watson, M. Tonks // AIAA SciTech – с. – 2023. – 30 p.

New class of rheologic complex models of materials fractional type with piezoelectric properties and a class of rheologic discrete dynamics system oscillator type or creeper type

Katica R. (Stevanović) Hedrih^{1, 2} [0000-0002-2930-5946]

¹ Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia
e-mail: katicah@mi.sanu.ac.rs, khedrih@sbb.rs

² Faculty of Mechanical Engineering, The University of Niš, Niš, Serbia
e-mail: katicahedrih@gmail.com

Abstract:

Two new rheological elements were introduced: a rheological basic Newton's element of ideal fluid fractional type and a basic Faraday element of ideal elastic material with the property of polarization under mechanical loading and piezoelectric properties. By incorporating these new introduced rheologic elements into classical complex rheological models, a new class of complex rheologic models of materials with piezoelectric properties described by differential fractional-order constitutive relations was obtained. A set of seven new complex rheological models of materials are presented with appropriate structural formulas.

New rheologic discrete dynamic systems of the fractional type rheologic oscillator or creeper type are presented through an overview of Author's new research results. Laplace transformations of solutions for independent generalized coordinates, external and internal degrees of freedom of system dynamics were determined.

Key words: Standard light rheological complex models of the fractional type, Newton's ideally viscous fluid flow of the fractional type, new rheological discrete dynamic systems of the fractional type, internal degrees of freedom of movement, rheological oscillators, rheological creeper, Laplace transformations, surfaces of elongations of Laplace transformations

1. Introduction

Differential constitutive relations of the fractional order, which contain differential operators of the fractional order, are composed. The seven new complex models describe the properties of ideal new materials, which can be elastoviscous solids or viscoelastic fluids. See Table 1 and Ref. [4].

Using the newly introduced, by author, basic complex, as well as hybrid complex rheological models, of the fractional type, the dynamics of a series of mechanical rheologic discrete dynamic systems of rheologic oscillators or creepers of the fractional type, see Table 2, with corresponding independent generalized coordinates, external and internal degrees of freedom of movement were studied. Laplace transformations of solutions for independent generalized coordinates, external and internal degrees of freedom of system dynamics were determined. On those specimens, it was shown that rheologic complex models, of the fractional type, introduce internal degrees of freedom into the dynamics of the rheologic discrete dynamic system.

2. Main results

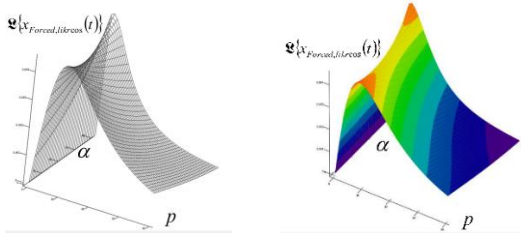
A series of characteristic surfaces of elongations of Laplace transformations of independent generalized coordinates of the dynamics of rheologic discrete dynamic systems of the rheologic oscillator type, i.e. rheologic creeper type, as a function of fractional order differentiation exponent and Laplace transformation parameter are shown. The manuscript presents the scientific results of theoretical research on dynamics of rheologic discrete dynamic systems of the fractional type through new models and rigorous mathematical analytical analysis with differential equations fractional order and Laplace transforms, see Fig.1.

3. Conclusions

The manuscript presents the scientific results of theoretical research on dynamics of rheologic discrete dynamic systems

Table 1. Tabular comparative overview of new class of complex rheological models of fractional type of ideal materials with piezoelectric properties [4]

	Solid Elastoviscous fractional type piezoelectric property:	Fluid Viscoelastic fractional type piezoelectric property:
Rheological basic complex model fractional type piezoelectric property: Kelvin-Voigt-Faraday's model and Maxwell-Faraday's model	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
Two rheological complex model fractional type piezoelectric property: Lethersch-Faraday-F's model and Lethersch-Faraday-F's model	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
Two rheological complex model fractional type piezoelectric property: Jeffry-Faraday-F's model and Jeffry-Faraday-F's model	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
Two rheological complex model fractional type piezoelectric property: Burgers-Faraday-F's model and Burgers-Faraday-F's model	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$



a- $\mathfrak{L}\{x_{Forced,likwos}\}, 0 < \alpha < 1$ b- $\mathfrak{L}\{x_{Forced,likwos}\}, 0 < \alpha < 1$

Figure 17. The space surfaces of Laplace transforms of rheological elastoviscous forced mode $\mathfrak{L}\{x_{Forced,likwos}\}$ - (a) in black-white and (b)

in color) of independent generalized coordinate $\{x(t)\}$, of external degree of freedom, of the rheological basic Kelvin-Voigt oscillator, fractional-type depending on the exponent α of the fractional order differentiation in the interval $0 < \alpha < 1$, and the Laplace transforms parameter p , for the elastoviscous oscillatory forced dynamics of the rheological basic complex Kelvin-Voigt discrete dynamic system, presented in upper part of from Figure 4, drawn using analytical expression (179), and in the case of single-frequency periodic force action $F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \varphi_0)$ for external forced frequency $\Omega = 2$

of the fractional type through new models and rigorous mathematical analytical analysis with differential equations fractional order and Laplace transforms. The results of the research on internal degrees of freedom and new ideal rheologic elements offer valuable insights into the behavior of materials. These results can serve for new experimental research, see Ref, [1-3].

Table 2. Tabular comparative overview of new class of complex rheologic discrete dynamic systems of fractional type with one or finite number of degrees of freedom [5]

	Rheological oscillator fractional type	Rheological creepfractional type
A rheological Kelvin-Voigt discrete dynamic system of fractional-type rheological oscillator (left) and a rheological Maxwell discrete dynamic system, a fractional-type rheological creep (right)	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
A rheological Kelvin-Voigt discrete dynamic system of fractional-type with piezoelectric property-rheological oscillator (left) and a rheological Lethersch discrete dynamic system, a fractional-type rheological creep (right)	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
A rheological Jeffry-F discrete dynamic system of fractional-type rheological oscillator (left) and a rheological Jeffry discrete dynamic system, a fractional-type rheological creep (right)	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
A rheological Burgers-Faraday discrete dynamic system of fractional-type with piezoelectric property-rheological oscillator (left) and a rheological Burgers discrete dynamic system, a fractional-type rheological creep (right)	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$
A rheological Kelvin-Voigt-Faraday discrete dynamic system of fractional-type with piezoelectric property-rheological chain oscillator (left) and a rheological Maxwell-Faraday discrete dynamic system, a fractional-type rheological chain creep (right)	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$	 $K_1 = (H/N_1) \cdot FY$ Faraday $K_2 = (H/N_2) \cdot FY$

References

- [1] Hedrih (Stevanović), K. R, Machado, J. T. (2015), Discrete fractional order system vibrations, *International Journal Non-Linear Mechanics*, 73, 2–11 .
- [2] Hedrih (Stevanović), K. R, Milovanovic G.V., Elements of mathematical phenomenology and analogies of electrical and mechanical oscillators of the fractional type with finite number of degrees of freedom of oscillations: linear and nonlinear modes, *Commun. Anal. Mech.* **16**(4) (2024), 738 – 785; DOI: 10.3934/cam.2024033.
- [3] Hedrih (Stevanović), K.R.; Hedrih, A.N. *Rheological Burgers–Faraday Models and Rheological Dynamical Systems with Fractional Derivatives and Their Application in Biomechanics*. Fractal Fract. 2024, 8, x. <https://doi.org/10.3390/xxxxx>,
- [4] Hedrih (Stevanović), K. R, (2025), An Overview: New Class of Complex Models of Materials Piezoelectric Properties with Differential Constitutive Relation of Fractional Order, Editors: A.Lopes, S. A/ David and A.a M.S.F. Galhano. Fractal and Fractional, 2025, 9, x, <https://doi.org/10.3390/xxxxx>
- [5] Rheologic Fractional Oscillators or Creepers, Fractal Fractional, 2025, **accepted for printing yesterday!**

Шамрай Максим Борисович,
 Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: m.shamrai@imath.kiev.ua;

CONTROL ERROR BOUND FOR PRUNED NEURAL CONTROLLERS

Maksym Shamrai

Modern control systems often deploy artificial neural networks as feedback policies because of their expressive efficiency. In particular, recent Vision-Language-Action (VLA) controllers learn commands from joint image–text inputs and enable effective robotic control [1]. But when such policies must run on hardware with strict latency and memory budgets, aggressive compression becomes essential.

Classical second-order pruning methods – Optimal Brain Damage [2] and Optimal Brain Surgeon (OBS) [3] – have recently evolved into the highly scalable SparseGPT algorithm for large language models [4]. These techniques delete weights by minimising a second-order activation loss

$$E = \|W X - \hat{W} X\|_2,$$

yet their influence on the control signal has not been formalised.

We analyse an arbitrary discrete-time control system $x_{t+1} = f(x_t, u_t)$ regulated by a baseline neural controller $u_t = \pi_\theta(x_t)$. After OBS-style pruning, the compressed policy $\hat{u}_t = \pi_{\hat{\theta}}(x_t)$ differs from the original by a parameter perturbation $\delta\theta$. For any feed-forward network we derive a parameter-space Lipschitz constant L_θ [5], and the uniform bound

$$\|u(x) - \hat{u}(x)\|_2 \leq L_\theta \|\delta\theta\|_2.$$

This result closes the gap between second-order pruning theory and closed-loop performance requirements, and contributes to verifiable control design.

1. Kim, Moo Jin, et al. "OpenVLA: An Open-Source Vision-Language-Action Model." 8th Annual Conference on Robot Learning, 2024.
2. LeCun, Yann, John Denker, and Sara Solla. "Optimal brain damage." Advances in Neural Information Processing Systems 2, 1989.
3. Hassibi, Babak, and David Stork. "Second order derivatives for network pruning: Optimal brain surgeon." Advances in Neural Information Processing Systems 5, 1992.
4. Frantar, Elias, and Dan Alistarh. "Sparsegpt: Massive language models can be accurately pruned in one-shot." International Conference on Machine Learning. PMLR, 2023.
5. Virmaux, Aladin, and Kevin Scaman. "Lipschitz regularity of deep neural networks: analysis and efficient estimation." Advances in Neural Information Processing Systems 31, 2018.

Шикула Олена Миколаївна, доктор фіз.-мат. наук, професор,
S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, Ukraine / State University of Information and Telecommunication Technologies, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: ensh@ukr.net;

Жукова Наталія Борисівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: zhukova_n@ukr.net;

Вишнівський Віктор Вікторович, доктор технічних наук, професор,
State University of Information and Telecommunication Technologies, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: vish_vv@ukr.net;

Білоусова Світлана Вікторівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
State University of Information and Telecommunication Technologies, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: svetlana_belousova@ukr.net

МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ АРМОВАНИХ В ПЛОЩИНІ ВОЛОКНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОЮ МАТРИЦЕЮ

Шикула О.М., Жукова Н.Б., Вишнівський В.В., Білоусова С.В.

Просторово армовані та армовані в площині волокнисті композити набули широкого застосування в різноманітних галузях техніки, де пред'являються вимоги до високої міцності при зниженій масі конструкцій. В умовах зростання навантаження багато однорідних і композитних матеріалів демонструють нелінійний характер залежностей між макронапруженнями та макродеформаціями. Це може бути обумовлене фізичною нелінійністю деформування компонентів. Армовані в площині волокнисті матеріали використовуються в оболонках, що входять в конструкції, які функціонують в умовах значних силових або температурних впливів. Тому прогнозування їх нелінійних властивостей та деформування є актуальним.

Метою цієї роботи є побудова моделі та дослідження нелінійного деформування армованих в площині волокнистих матеріалів з фізично нелінійною матрицею.

Побудована модель нелінійного деформування армованих в площині волокнистих матеріалів з фізично нелінійною матрицею. Такий матеріал розглядається як багатокомпонентний матеріал з випадковим розташуванням волокон, вважаючи матрицю і волокна кожного напрямку як окремі компоненти. Визначення ефективних деформативних властивостей та напружено-деформівного стану матеріалу базується на стохастичних диференціальних рівняннях фізично нелінійної теорії пружності. Для розв'язання задачі використовується метод умовних моментів Л.П.Хорошуна та схема Фойхта.

Для армованого в площині волокнистого матеріалу розроблені алгоритми визначення ефективних деформативних властивостей матеріалу. Розв'язок нелінійних рівнянь, що враховують фізичну нелінійність матриці, здійснюється за допомогою ітераційного методу. Встановлені закони зв'язку між макронапруженнями і макродеформаціями в матеріалі та залежності середніх деформацій і напружень в матриці матеріалу від макродеформацій, а також побудовані криві деформування матеріалу для різних значень об'ємного вмісту волокон. Встановлено, що матеріал добре витримує всі осьові навантаження, нелінійно деформується тільки при невеликому об'ємному вмісті волокон, а при зсувних навантаженнях в напрямку, перпендикулярному площині, в якій розташовуються волокна, нелінійність матриці дуже суттєво впливає на деформування композиту при всіх значеннях об'ємного вмісту волокон.

1. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикула Е.Н. Механика композитов: В 12 т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 12: Прикладные исследования. – К: А.С.К., 2003. – 398 с.

2. Шикула О.М., Жукова Н.Б. Модель деформування просторово-армованих волокнистих матеріалів з фізично нелінійною матрицею // Прикладна механіка. – 2024. – Т. 59, № 6. – С. 77-100.

Юзв'як Микола Йосипович, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
 Львів, Україна,
 e-mail: yuzvyak@iapmm.lviv.ua
 Токовий Юрій Владиславович, член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
 Львів, Україна,
 e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua (шрифт Times New Roman 11pt, вирівнювання по лівому краю);

ФУНКЦІЇ ВІГАКА В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Юзв'як М. Й., Токовий Ю. В.

Для дослідження зумовленого тривимірним квазістатичним температурним полем напруженого стану ізотропних простору $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, півпростору $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ та шару $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [-h, h]$ запропоновано узагальнення методу безпосереднього інтегрування [1, 2]. На відміну від класичних потенціальних функцій Максвелла чи Морери, компоненти тензора напружень за цим підходом визначають через запропоновані функції Вігака $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{V}_y$ та $\mathcal{V}_z$ не диференціальними, а інтегральними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}_y + \mathcal{V}_z) |x - \xi| d\xi, & \sigma_{xy} &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_z \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta, \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z) |y - \eta| d\eta, & \sigma_{xz} &= -\frac{1}{4} \int_L^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_y \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\xi d\zeta. \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{2} \int_L^{\infty} (\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y) |z - \zeta| d\zeta, & \sigma_{yz} &= -\frac{1}{4} \int_L^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_x \operatorname{sgn}(y - \eta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\eta d\zeta,\end{aligned}\quad (1)$$

Тут L означає область $(-\infty, \infty)$ у випадку простору, $[0, \infty)$ для півпростору та $[-h, h]$ для шару (усі області є).

Рівняння рівноваги при цьому задовольняються тотожно, а вихідна задача термопружності для розглянутих областей зводиться до розв'язання трьох інтегро-диференціальних рівнянь суцільності. Розв'язок цих рівнянь будується з використанням подвійного інтегрального перетворення Фур'є за координатами x та y . Показано що знайдені таким чином компоненти тензора напружень тотожно задовольняють і другу групу рівнянь суцільності, тим самим підтверджується правильність вибору ключових рівнянь суцільності для просторових задач [3].

Розглянуто випадок дії в безмежному середовищі і масових сил та застосування запропонованого підходу для розв'язання такої задачі. Як приклад показано ефективне використання співвідношень виду (1) до розв'язання відомої задачі Кельвіна.

1. Кушнір Р. М., Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь // Укр. мат. журнал. – 2021. – **73**, № 10. – С. 1355–1367.

2. Yuzvyak M., Tokovyy Y. Thermal stresses in an elastic parallelepiped // J. Thermal Stresses. – 2022. – **45**, No. 12. – P. 1009–1028.

3. Vihak V. M. Continuity equations for a deformable solid // J. Math. Sci. – 2000. – **99**, No. 5. – P. 1655–1661.

Яковенко Ніна Дмитрівна, кандидат фіз.-мат. наук

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,

e-mail: ndoksenchuk@gmail.com;

Доля Олена Вікторівна, кандидат фіз.-мат. наук,

²Київський національний університет будівництва та архітектури, Київ, Україна,

e-mail: dolia.ov@knuba.edu.ua

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО ТА МІКРОСТРУКТУРНОГО СТАНІВ ПІВПРОСТОРУ ЗА УМОВ ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

¹Яковенко Н.Д., ²Доля О.В.

В даній роботі розглядається динамічна осесиметрична зв'язана задача про імпульсне термічне навантаження півпростору. Мікроструктурні перетворення враховуються через термотрансформаційну деформацію та залежність непружних характеристик матеріалу від фазового складу. Математична постановка задачі в циліндричній системі координат включає: кінематичні співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, де враховуються термopружна, термотрансформаційна та динамічна зв'язаності, а також початкові та граничні умови. В роботі використовується модель поступової аустенізації. Об'ємні концентрації мікроструктурних фаз при нагріванні і охолодженні визначаються з експериментальних даних, які узагальнені в термокінетичній діаграмі. Непружна поведінка матеріалу описується моделлю течії Боднера-Партома. Параметри моделі течії, які відповідають за границю течії та тимчасовий опір матеріалу, для окремих фаз визначаються за допомогою лінійного правила сумішей на основі експериментальних даних [1].

Задача термомеханіки розв'язується чисельно з використанням методу покрового інтегрування за часом, ітераційного методу в поєднанні з методом скінченних елементів [2].

Для обґрунтування достовірності розрахунків здійснюється перевірка того, чи буде неізотермічний напружений стан, який реалізується в деякій точці тіла в якийсь момент часу, що відповідає активній стадії навантаження, накладатися на діаграму навантаження для відповідних значень еквівалентних напружень, деформації та швидкості деформації.

Встановлено, що мікроструктурні перетворення призводять до появи стискальних напружень замість розтягувальних. Також зменшується рівень непружного деформування. Мікроструктурні перетворення значно зменшують рівень залишкових непружних деформацій головним чином внаслідок зменшення розтягувальних напружень за рахунок збільшення об'єму матеріалу у фазі мартенситу, а також суттєвого зміцнення матеріалу.

Узагальнена модель течії та методика чисельного розв'язання дозволяють точніше оцінити поточний та залишковий напружено-деформований і мікроструктурний стани, який при подальшому експлуатаційному циклічному навантаженні циліндричних деталей через асиметрію циклу суттєво впливають на втомний опір і ресурс циклічно деформованих елементів конструкцій.

1. Senchenkov I. K. Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material / I. K. Senchenkov, N. D. Oksenchuk // J. Math. Sci. – 2013. – V. 190, N 6. – P. 796 – 803. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>

2. Zhuk Y. A. Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity / Y. A. Zhuk, I. K. Senchenkov, V. I. Kozlov, G. A. Tabieva // Int. Appl. Mech. – 2001. 37, No.10. – P. 1311–1317. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

Янчевський Ігор Владиславович, доктор фіз.-мат. наук, професор
 Національний технічний університет України
 «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
 e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua
 Гетьман Тарас Віталійович
 Національний технічний університет України
 «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
 e-mail: tarashetman@gmail.com

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ КВАЗІСТАТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ У ПРОГРАМНОМУ КОМПЛЕКСІ, ЩО РЕАЛІЗУЄ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Янчевський І.В., Гетьман Т.В.

Наявність повної та достовірної інформації про механічні навантаження є важливою складовою як при проектуванні відповідальних деталей та елементів конструкцій в цілому, так і при їх експлуатації. У низці випадків отримання відсутньої інформації стосовно діючих навантажень можливе через розв'язання т.зв. граничних обернених задач механіки. Однак не зважаючи на наявність численних фундаментальних теоретичних досліджень з питань розробки ефективних чисельно-аналітичних методів розв'язання задач зазначеного класу, більшість з цих результатів залишаються недоступними для широкого загалу. У той же час впровадження таких методів у різноманітні виробничі процеси є не лише нагальним, а і сприятиме подальшому розвитку теорії та практики обернених задач. У деяких публікаціях, зокрема у монографії [1], показана можливість застосування програмних комплексів, що реалізують метод скінченних елементів, для ідентифікації як квазістатичних, так і нестационарних навантажень. При цьому залучення програмного комплексу обмежується формуванням т.зв. «коефіцієнтів/функцій чутливості» через розв'язання відповідних прямих задач з відомими «тарифувальними навантаженнями». Решта алгоритму реалізується окремо.

Дана доповідь присвячена проблемі ідентифікації діючих на елемент конструкції довільної геометрії механічних навантажень з використанням виключно одного загальновідомого програмного комплексу ANSYS. Обговорюється розробка т.зв. Надбудови зі зручним користувацьким інтерфейсом для розв'язання прикладних задач механіки з ідентифікації як одиночних, так і множинних статичних та квазістатичних навантажень без необхідності перемикавання між різними середовищами для розрахунків.

Розробка проводилась на основі ANSYS Customization Toolkit [2]. Для конфігурації панелі інструментів Надбудови застосовувався XML-код, а для втілення основної логіки – Iron Python, який є реалізацією мови Python версії 2.7.5 для платформи .NET. У розробленій Надбудові впроваджено механізм формування APDL-макроса, який виконується у окремому зовнішньому процесі розв'язувача ANSYS і передбачає залучення регуляризаційних алгоритмів для зменшення впливу обчислювальних похибок та погіршностей у вхідних даних на результат розрахунку. З метою оцінки ефективності розробленої Надбудови було виконано чисельний експеримент для ідентифікації множинних квазістатичних навантажень, прикладених до анізотропної прямокутної у плані пластини. Отримані результати засвідчили ефективність Надбудови та прийнятну точність отриманих результатів.

1. Янчевський І.В. Нестационарні коливання біморфних електропружних тіл: монографія / І. В. Янчевський. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 447 с.

2. Янчевський І.В. Розробка надбудови в ANSYS для розв'язання обернених граничних задач механіки на основі АСТ / І.В. Янчевський, Т.В. Гетьман // Міжн. наук. конф. «Механіка: сучасність і перспективи – 2024», м. Київ, 8-10 жовтня 2024 р. – С. 316-317.

Янчевський Ігор Владиславович, доктор фіз.-мат. наук, професор
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
 e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua
 Остос Олександр Хосейович, доктор філ. в гал. мат. та стат.,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
 e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com
 Кришталь Володимир Федорович, канд. техн. наук, доцент
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
 e-mail: krishtalvf@gmail.com

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ СФЕРИЧНОГО СЕГМЕНТА В НАПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ З ІДЕАЛЬНОЮ СТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ

Янчевський І.В., Остос О.Х., Кришталь В.Ф.

Аналіз взаємодії акустичних, пружних і електромагнітних хвиль з системою відбиваючих поверхонь представляє значний науковий і практичний інтерес. Відповідні дослідження передбачають розробку методів розв'язання задач багатократного розсіювання. Фундаментальні результати з питань дифракції акустичних хвиль у механічних системах з плоскими границями, системах із замкненими циліндричними та сферичними границями представлені в монографіях [1, 2]. Практичне значення отриманих в рамках таких досліджень результатів полягає у ефективному прикладному застосуванні супроводжуючих дифракційні процеси механічних ефектів, у тому числі так звані акустичні радіаційні сили на занурені в акустичне середовище тіла, які широко використовуються в різноманітних галузях людської діяльності [3].

В даній доповіді обговорюється методика побудови точного аналітичного розв'язку задачі дифракції акустичних хвиль в напівнескінченній круговій циліндричній порожнині з ідеальною стисливою рідиною. Вважається, що генератором хвиль заданої амплітуди тиску є сферичний сегмент, який розташований на осі порожнини. Метою роботи є отримання залежностей для тиску та швидкості середовища від частоти коливання сегменту при різних співвідношеннях геометричних параметрів механічної системи, виявлення нових ефектів, обумовлених дифракційними процесами на системі неоднотипних тіл.

Усталені хвильові процеси в рідині описуються рівнянням Гельмгольца. Для задоволення граничних умов як на поверхні сферичного сегмента, так і на циліндричній поверхні порожнини та її торці, застосовані метод уявних джерел та співвідношення, що дозволяють представити циліндричні хвильові функції через сферичні й навпаки. В результаті розв'язання граничну задачу зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів загального розв'язку, матриця якої містить невластні інтеграли. Зазначена система розв'язується методом усічення з контрольованою точністю. Чисельні результати отримані для осесиметричного випадку. Обчислені залежності акустичного тиску і швидкості від частоти збудження сегменту в характерних точках порожнини при різних співвідношеннях між геометричними параметрами системи.

1. Жук О.П., Гузь О.М., Жук Я.О. Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями. – Київ: Альянт, 2023. – 240 с.
2. Кубенко В.Д., Янчевський І.В. Дифракція акустичних хвиль на системах неоднотипних тіл. – Київ: Політехніка, 2024. – 268 с.
3. Bubble and particle dynamics in acoustic fields: Modern trends and applications / Ed. By A.A. Doinikov. – Trivandrum Research Signpost, 2005. – 338 p.

Яровой Леонід Костянтинович, канд. техн. наук, ст. наук. співроб.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua;

Мельниченко Микола Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

Степахно Ірина Василівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Національний університет "Київський політехнічний інститут імені Сікорського", Київ, Україна.

КОМПЛЕКСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ТА ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ В ОДНОВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТАХ ЗАСОБАМИ ТРЬОХВИЛЕВОЇ ЛАЗЕРНОЇ ВІБРОМЕТРІЇ

Яровой Л.К., Мельниченко М.М., Степахно І.В.

Згинні коливання в одновимірних пружних структурах є важливим об'єктом дослідження для розуміння їхньої динамічної поведінки та застосування в неруйнівному контролі. Хвилі Лемба, що поширюються в тонких пластинах, демонструють високу чутливість до структурних дефектів, що робить їх цінним інструментом діагностики [1].

Традиційні п'єзоелектричні методи дослідження коливань, хоча й поширені, мають обмеження, пов'язані з контактним зв'язком. Лазерна доплерівська віброметрія (ЛДВ) пропонує безконтактний підхід із високою точністю вимірювання [2, 3]. Останнім часом розвивається метод трьоххвильової лазерної віброметрії (ТХЛВ), який використовує інтерференцію трьох когерентних хвиль для значного підвищення чутливості вимірювання амплітуд вібрацій, особливо в нанометровому діапазоні [4].

Новим напрямом застосування методів ТХЛВ у механіці є дослідження акустичних хвиль, що поширюються на поверхні об'єктів. Наявність двох зондувальних променів у системах ТХЛВ надає можливість досліджувати фазові співвідношення поверхневих хвиль у визначених точках. Це дозволяє визначати швидкість, напрямок поширення та довжину хвилі. Разом із класичними даними ЛДВ — спектральними характеристиками коливань поверхні у досліджуваній точці — метод ТХЛВ забезпечує комплексного аналізу поверхневих хвиль та коливань. Крім того, оптимізація фазових співвідношень у ТХЛВ дозволяє досягти високої чутливості та зменшити вплив зовнішніх умов.

У доповіді наведено результати моделювання запропонованого методу ТХЛВ. Отримані за допомогою ЛДВ та ТХЛВ результати експериментальних досліджень резонансних згинних коливань та поверхневих хвиль Лемба в одновимірних об'єктах (трубка та алюмінієва смуга) порівнюються між собою та з результатами чисельного моделювання. В роботі також демонструється вплив незначних структурних неоднорідностей досліджуваних об'єктів на експериментальні характеристики. Таким чином, застосування ТХЛВ може бути ефективним у дослідженнях механіки поверхневих хвиль та неруйнівному контролі.

1. Silitonga D. J., Declercq N. F., Walaszek H., Thabourey J. A comprehensive study of non-destructive localization of structural features in metal plates using single and multimodal Lamb wave excitations // *Acta Acustica*. – 2024. – Vol. 8. – Article No. 12.

2. Rothberg, S. Laser Doppler Vibrometry: Principles and Applications // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2011. – Vol. 369, No. 1948. – P. 2901–2917.

3. Яровой Л. К. та ін. Лазерний доплерівський віброметр з можливістю сканування віддалених об'єктів / Отто Г. К., Куценко, О.Г., Яровой Л. К. та ін. // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки*. – 2019. – С. 16–19.

4. Yarovoi, L., Stepakhno, I. A Novel Approach to Reduce the Influence of External Conditions on the Laser Doppler Vibrometer Signal Acting in the Nanometer Range // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 1149. – P. 012023-1–012023-8.