



До 185-річчя
Київського національного
університету
імені Тараса Шевченка



**До 85-ої річниці
з дня народження
члена-кореспондента НАН України
УЛІТКА Андрія Феофановича**

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

V Міжнародної наукової конференції

Сучасні проблеми механіки (МРМ)

(28-30 серпня 2019 р.)

Голова оргкомітету	– Мартинюк Віктор Семенович, професор, проректор з наукової роботи
Співголова оргкомітету	– Городній Михайло Федорович, професор, декан механіко-математичного факультету
Члени оргкомітету:	– Жук Ярослав Олександрович, професор, зав.кафедри теоретичної та прикладної механіки, – Маципура Володимир Тимофійович, професор, – Зражевський Григорій Михайлович, доцент, – Лебедєва Ірина Валеріївна, доцент, – Улітко Ігор Андрійович, доцент, – Борисейко Олександр Віталійович, доцент, – Харитонов Олексій Михайлович, доцент, – Куценко Олексій Григорович, доцент, – Курилко Олександр Борисович, асистент, – П'ятецька Олена Василівна, ст. наук. співробітник – Нікітенко Віктор Миколайович, інженер, – Клімчук Тараса Володимирович, математик 1 кат. – Остос Олександр Хосейович, аспірант, – Троценко Ярослав Павлович, аспірант

Відповідальний секретар оргкомітету

Жук Ярослав Олександрович, зав.кафедри теоретичної та прикладної механіки,
р.(044)259-03-07, моб. (097)490-11-89

Секретарі оргкомітету

Яковенко Катерина Іванівна, пров.інж., р.(044)521-35-99 , моб.(067)502-99-99

Пучко Наталія Петрівна, пров.матем., р.(044)521-33-34, моб.(067)683-45-34

Клімчук Тарас Володимирович, матем. 1 кат. р. (044)521-33-34, моб.(067)384-78-23

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

- Грінченко В.Т.*, академік НАН України, директор Інституту гідромеханіки НАН України
Кушнір Р.М., академік НАН України, директор ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
Кубенко В.Д., академік НАН України, заступник директора Інституту механіки
ім. С.П. Тимошенка НАН України
Морозов М.Ф., академік РАН, Санкт-Петербурзький державний університет, РФ
Гудрамович В.С., член-кор. НАН України, зав. відділу Інституту технічної механіки
НАН України і НКА України
Вайсфельд Н.Д., зав. кафедри Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова
Григоренко О.Я., зав. відділу Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
Лобода В.В., зав.кафедри Дніпровського національного університету ім. О. Гончара
Дзюба А.П., професор Дніпровського національного університету ім. О. Гончара
Жук Я.О., зав. кафедри Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
Карнаухов В.Г., зав. відділу Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
Попов В.Г., зав. кафедри Одеської національної морської академії
Сулим Г.Т., зав. кафедри Львівського національного університету ім. Івана Франка
Гуржій О.А., професор Національного технічного університету України «КПІ»
Маціпура В.Т., професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
Можаровський В.В., професор Гомельського державного університету
ім. Франциска Скорини, Білорусія
Краснопольська Т.С., пров. наук. співр. Інституту гідромеханіки НАН України
Сенченков І.К., головний наук. співр. Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
Зражевський Г.М., доцент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
Олійник В.Н., ст. наук. співр. Інституту гідромеханіки НАН України
Улітко І.А., доцент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
Guz, I.A., 6th Century Professor, University of Aberdeen, Scotland, UK
Kashtalyan, M.Yu., Professor, University of Aberdeen, Scotland, UK
Muller, W., Professor, Technical University of Berlin, Germany,
Silberschmidt, V., Professofof, Loughborough University, UK
Katica R. (Stevanović) Hedrih, Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts
(SANU), Serbia

ЗМІСТ

<i>Абрамов О.А., Отто Г.К., Яровой Л.К., Смельянов В.В., Отто К.В.</i> Лазерний доплерівський віброметр з можливістю сканування віддалених об'єктів	12.
<i>Адлуцький В.Я., Годес А.Ю., Лобода В.В.</i> Скінченноелементний аналіз пружно-пластичного стану тріщини на межі розділу площини з круговим включенням	13.
<i>Андрущенко В.О., Горошко І.О., Нікітенко В.М.</i> Дослідження резонансних коливань високодобротного диска нерівномірної товщини із алюмінієвого сплаву	14.
<i>Архипенко К.М., Кривий О.Ф.</i> Міжфазні тріщина та включення, що дотикаються, у неоднорідній анізотропній площині	15.
<i>Бобилев Д.Є.</i> Дослідження напружено-деформованого стану ауксетичного піноматеріалу методом скінченних елементів	16.
<i>Bogdanova O.S.</i> Influence of the material anisotropy on the limit state of orthotropic plate with periodic system of collinear cracks under biaxial loading	17.
<i>Борисейко О.В., Лебедєва І.В., Яцук В.М.</i> Пружні коливання та їх вплив на оптичні властивості кремнієвих та германієвих наночастинок	18.
<i>Борисейко О.В., Улітко І.А., Курилко О.Б.</i> Трансформація резонансних властивостей п'єзоелементів неканонічної форми в стержневих моделях змінного поперечного перерізу	19.
<i>Васильєв К.В., Сулим Г.Т.</i> Пружна рівновага анізотропного півпростору з пружним анізотропним включенням за поздовжнього зсуву	20.
<i>Вовк І.В., Маціпура В.Т.</i> Особливості застосування методу часткових областей	21.
<i>Гарматій Г.Ю.</i> Неусталений тепловий стан тришарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну	22.
<i>Hedrih (Stevanović) R. Katica</i> Fractional type modes of free and forced transversal vibrations of a hybrid multi-membrane system	23.
<i>Голуб В. П.</i> Щодо розв'язку задач повзучості тонкостінних трубчастих елементів із ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів	24.
<i>Горошко І.О., Білий В.О.</i> Моделювання динаміки гнучких крил літаків з паливом у внутрішніх баках	25.
<i>Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M.</i> Numerical studying of free vibrations of cylindrical bodies made of functionally gradient material	26.
<i>Гринченко В.Т., Зражевский Г.М., Шакери Мобаракє Пуян.</i> О методе анализа свободных и вынужденных колебаний мембран сложной формы	27.
<i>Гуржий А.А., Кордас О., Никифорович Е.И., Осадчий В.И., Черний Д.И.</i> Моделирование особенностей процесса распространения поверхностных загрязнений в речных системах	28.
<i>Демидов О.В., Попов В.Г.</i> Аналіз перехідного процесу при нестационарному крутінні у скінченному циліндрі з кільцевою тріщиною	29.

- Dibajian S. H., Kavian E.* Investigation the effect of non-uniform voids on the final strength of engineered porous materials 30.
- Діденко Ю.Ф., Денисенко В.І., Щетініна О.К.* Про точний розв'язок задачі просторової теорії потенціалу для двох сфер 31.
- Довгий С.О., Черній Д.І.* Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики і механіки 32.
- Довжик М.В., Назаренко В.М.* Руйнування композитних та високоеластичних матеріалів під час стиску вздовж приповерхневої дископодібної тріщини 33.
- Дудик М.В., Решітник Ю.В.* Когезійна модель зони передруйнування біля вершини тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу матеріалів 34.
- Дудик М.В.* Про взаємний вплив контакту берегів і утворення зони передруйнування в привершинній області міжфазної тріщини 35.
- Жук Я.О.* Теплова нестійкість нанокompозитних елементів конструкцій при циклічному навантаженні 36.
- Жук О.П., Жук Я.О.* Дія радіаційної сили в звуковій хвилі на сферичну краплю в околі вільної поверхні рідини 37.
- Журавльова З.Ю.* Плоска мішана задача теорії пружності для півсмути під впливом динамічного навантаження 38.
- Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф.* Використання формалізму узагальнених функцій при моделюванні дефектів точковими сингулярностями 39.
- Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф.* Дослідження оптимізаційної задачі збудження коливань пластини 40.
- Калиняк Б.М.* Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні 41.
- Карнаухов В.Г., Козлов В. И., Карнаухова Т.В.* Критическая электрическая нагрузка на шарнирно опертую трехслойную вязкоупругую прямоугольную пьезопластину 42.
- Карнаухов В.Г., Козлов В. И., Карнаухова Т.В.* Параметрические колебания трехслойной шарнирно опертой вязкоупругой прямоугольной пьезоэлектрической пластины 43.
- Kharytonov O., Savchenko S., Miranda N.* Optimization of space maneuvers using high and low thrust with a nuclear engine 44.
- Клімчук Т. В., Острик В. І.* Ковзний контакт пружної смуги та параболічного штампа 45.
- Кобзар Ю.М.* Втомна довговічність гладких циліндричних стрижнів при одновісному симетричному розтягу-стиску 46.

<i>Константинов О.В.</i> Керування системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» з використанням принципу найменшого примусу Гаусса	47.
<i>Козлов В.И., Шевченко А.Ю.</i> Численное исследование динамического поведения слоистых трехмерных тел вращения из вязкоупругих материалов	48.
<i>Краснопольська Т.С.</i> Хвилі на вільній поверхні рідини в «співучому бокалі»	49.
<i>Кривий О.Ф., Морозов Ю.О.</i> Кругове теплоактивне міжфазне включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі	50.
<i>Кундрат М.М., Кундрат А.М., Заблотська Ю.В.</i> Відшарування гнучкого нерозтяжливого підсилення вільного краю півбезмежної пластини	51.
<i>Куценко О.Г., Харитонов О.М., Харитонova Л.В.</i> Аналітична модель деформування фланця з приєднаною обичайкою під дією внутрішнього тиску	52.
<i>Лавренюк М.В.</i> Методи розрахунку прогину ортотропної неоднорідної пластини на пружній основі	53.
<i>Лимарченко О. С., Слюсарчук Ю.А.</i> Аналіз впливу маси резервуару на поведінку системи сферичний резервуар – рідина з вільною поверхнею	54.
<i>Ловейкін А.В.</i> Рівновага пружної півплощини із жорстко закріпленою межею, яка послаблена похилим розрізом	55.
<i>Zhang L., Zhao L., Roy A., Silberschmidt V., McColvin G.</i> The Slip-controlled Short-crack Growth in Single-crystal Nickel Superalloy: In-situ SEM Observation and Crystal Plasticity Finite Element Simulation	56.
<i>Лубков М. В.</i> Застосування скінчено-елементно-різницевого методу для моделювання фільтраційних процесів	57.
<i>Мазко А. Г., Котов Т. А.</i> Стабилизация и подавления ограниченных возмущений в дескрипторных системах управления	58.
<i>Маковійчук М.В., Шацький І.П.</i> Згин зосередженою силою тонкої пластини, розташованої на пружній основі та послабленої контактною тріщиною	59.
<i>Максимюк В.А., Сторожук Є.А., Чернищенко І.С.</i> Ретроспектива задачі про деформування довгої тонкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу	60.
<i>Маслов Б.П.</i> Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для моделювання повзучості неоднорідного геологічного масиву	61.
<i>Mehreganian N., Fallah A. S., Louca L.A.</i> Large elastic-plastic deformation of square membranes subjected to localised pulse pressure loads	62.
<i>Можаровский В.В., Москалева М.В.</i> Реализация расчета деформации зубьев зубчатых колес из композитов с использованием методов сопротивления материалов	63.
<i>Navadeh N., Goroshko I.O., Fallah A.S., Zhuk Y.A.</i> An ai approach to parameter	64.

- identification for low vibration modes of wind turbine composite rotor blades
Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A model for interphase damage evaluation in random particulate composites 65.
- Нікітенко В.М., Андрущенко В.О., Горошко І.О., Пучко Н.П.* Результати математичного моделювання і експериментальних досліджень резонансних коливань стрижневого резонатора кругового перетину 66.
- Онишкевич В.М., Сулим Г.Т.* Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штампа з пружною півплощиною 67.
- Опанасович В.К., Слободян М.С., Білаш О.В.* Чистий згин полоси (балки) з довільно орієнтованою наскрізною тріщиною 68.
- Остос О.Х., Жук Я.О.* Вплив попереднього деформування на циклічну термомеханічну поведінку еластомерного в'язкопружного циліндричного стержня 69.
- Пелих В.М.* К решению задач усталости при двухосном комбинированном нагружении статическим кручением и симметричным циклическим изгибом 70.
- Перепічка В.В.* Залишкові напруження в пружному стержні з зовнішнім сухим тертям при ударі з довантаженням притиску 71.
- Плащинська А.В.* Щодо моделювання розповсюдження тріщини втоми в тонкій ізотропній пластині в умовах двовісного асиметричного розтягу-стиску 72.
- Попов В.Г., Литвин О.В.* Напружений стан у пружному тілі з триланковим жорстким включенням при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву 73.
- Прокопечко У. С., Шацький І. П.* Задача динаміки для струни, розташованої на основі з дробовою реологією 74.
- Процюк Б.В.* Визначення квазістатичного термопружного стану плоскошаруватих термочутливих тіл 75.
- П'ятецька О.В.* Демпфірування неізотермічних коливань пластин з одночасним використанням сенсорів та актуаторів 76.
- Райновський І.А.* Усталені резонансні коливання рідини у вертикальному циліндричному баці при орбітальних збуреннях 77.
- Реут В.В., Молоканов Ю.В.* Плоский напружений стан для смуги, що ослаблена тріщиною 78.
- Ревенко В.П.* Розрахунок методом скінченних тіл плоского напруженого стану прямокутних пластин із прямокутним отвором 79.
- Рево С.Л., Мельниченко М.М., Авраменко Т.Г., Андрущенко В.О., Іваненко К.О.* Мікротвердість компактованого термічно розширеного графіту 80.
- Резник В.С.* Об одном методе определения параметров ядер наследственности нелинейно вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии 81.
- Романов О.В., Фернаті П.В.* До питання врахування впливу третього інваріанту девіатора напружень на процес довготривалого деформування нелінійно-

в'язкопружних матеріалів	
<i>Розумнюк В. І.</i> Про загальні розв'язки рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса	83.
<i>Rushchitsky Jeremiah</i> To evolution of solitary waves: comparison of two approximate approaches	84.
<i>Rushchitsky Jeremiah, Yurchuk Vasyl</i> To evolution of solitary longitudinal and transverse plane waves propagating in nonlinearly elastic material	85.
<i>Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I., Vovk V.S.</i> Asymptotic analysis to the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation	86.
<i>Савельєва К.В., Дашко О.Г., Симчук Я.В.</i> Плоскі хвилі в нанокompозитних матеріалах	87.
<i>Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.</i> Розкриття крайової тріщини нормального відриву в ізотропній півплощині із врахуванням наявності зони зчеплення у вершині	88.
<i>Сенченков И.К., Червинко О.П.</i> Расчет НДС полого слоистого вязкоупругого цилиндра при импульсном нагружении по внешней боковой поверхности	89.
<i>Середницька Х.І., Мартиняк Р.М.</i> Термопружна поведінка біматеріалу з міжфазною щільною, заповненою нестисливою рідиною	90.
<i>Solodun A.V.</i> Studies of the spectral problem on natural liquid sloshing in a toroidal tank	91.
<i>Тарасов А. П., Жук Я. О., Киричок І.Ф.</i> Постановка задачі термомеханіки для гнучкої циліндричної оболонки з п'єзоактивними шарами при врахуванні зсувів	92.
<i>Timokha A.N., Lahodzinskyi O.E.</i> Steady-state sloshing in an orbitally-forced square-base tank	93.
<i>Timokha A.N., Tkachenko E.M.</i> Analytical solutions for the capillary curve problems	94.
<i>Троценко Я.П.</i> Чисельне моделювання потоку в'язкої нестисливої рідини крізь циліндричні порожнини	95.
<i>Турчин І.М., Василько Г.В.</i> Нестационарна змішана задача теплопровідності для півбезмежного порожнистого циліндра	96.
<i>Улітко І.А., Горошко І.О., Андрущенко Т.В.</i> Особливості акустичних резонаторів пластинчатого типу на крайових модах	97.
<i>Fallah A.S., Tereshchuk V.V., Navadeh N., Gorshkov V.N.</i> Phononic dispersion in finite fractal lattices	98.
<i>Фесенко Г. О.</i> Динамічні задачі для пружного шару з дефектом	99.
<i>Фрейдин А.Б., Морозов Н.Ф., Морозов А.В., Muller W.H., Шарипова Л.Л.</i> Кинетика, устойчивость и блокирование фронтов химических реакций в деформируемых телах	100.

Абрамов Олександр Анатолійович¹, провідний інженер,
Отто Георгій Костянтинович¹, провідний інженер,
Яровой Леонід Костянтинович¹, кандидат технічних наук, с.н.с.
¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua;
Ємельянов Володимир Васильович², провідний інженер,
Отто Костянтин Валентинович², начальник відділу,
²ПРАТ Альтрон, Харків, Україна,
e-mail: otto0kv@gmail.com

ЛАЗЕРНИЙ ДОППЛЕРІВСЬКИЙ ВІБРОМЕТР З МОЖЛИВІСТЮ СКАНУВАННЯ ВІДДАЛЕНИХ ОБ'ЄКТІВ

Абрамов О.А., Отто Г.К., Яровой Л.К., Ємельянов В.В., Отто К.В.

Лазерні доплерівські скануючі віброметри користуються великим попитом, як в промисловості, так і в наукових дослідженнях [1]. Скануючий віброметр надає можливість досліджувати в автоматичному режимі розподіл амплітуд коливань складних поверхонь довільних об'єктів при вирішенні задач акустики, неруйнівного контролю, експериментальної механіки, та ін.[2, 3].

Відомо, що найбільш чутливими до рівня відбитого випромінювання є лазерні віброметри з внутрішньо-резонаторним гетеродинним прийомом оптичного випромінювання. Такі прилади надають змогу вимірювати коливання на відстані кількох сотень метрів, не вимагаючи спеціальної підготовки поверхні досліджуваного об'єкту [4]. Поєднання системи сканування з можливостями внутрішньо-резонаторного гетеродинного прийому підіймають на новий рівень дистанційне неруйнівне дослідження коливань віддалених об'єктів.

Українська корпорація «Альтрон» у співпраці з механіко-математичним факультетом КНУ розробила надсучасний лазерний віброметр на принципі внутрішньо-резонаторного прийому лазерного випромінювання, який може вимірювати вібрацію в наноамплітудному діапазоні на відстані більше 200 метрів. Сканування відбувається в межах ± 10 градусів по обом координатах. Віброметр забезпечено автоматичною системою позиціонування зондувального променя та сканування віддаленого об'єкту. Прив'язка точок спостереження та контроль за скануванням відбувається за допомогою відеокамери з телескопічним об'єктивом.

Для демонстрації можливостей створеного приладу на відстані 45 м були досліджені розподіли амплітуди коливань віброуючого стрижня та мембрани.

1. Khan A.Z., Stanbridge A.B., Ewins D.J. Detecting damage in vibrating structures with a scanning LDV / A.Z. Khan , A.B. Stanbridge , D.J. Ewins // Opt. Lasers Eng. – 2000. – vol. 32. –P. 583–592.
2. Weisbecker H., Cazzolato Ben, other. Surface Strain Measurements Using a 3D Scanning Laser Vibrometer // Experimental Mechanics. – 2012. – vol. 52. –P. 805-815.
3. Rembe C., Drabenstedt A. Laser-scanning confocal vibrometer microscope: Theory and experiments // Rev. Sci. Instrum. – 2006. – vol. 77. , 083702
4. Розумнюк В.І., Отто Г.К., Яровой Л.К. Застосування лазерної доплерівської віброметрії для отримання акустичної інформації на значній відстані / В.І. Розумнюк, Г.К.Отто, Л.К. Яровой // Всеукраїнська науково-практична конференція "Роль і місце національної спецслужби в історії українського державотворення". Київ, 17 березня 2017 року, Збірник тез. – 2017. – С.146

Адлуцький Віктор Якович, кандидат фіз.-мат. наук, с.н.с.,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
e-mail: adluckii_vy_kkt@dnu.dp.ua;
Годес Аліна Юліївна, кандидат фіз.-мат. наук,
Дніпро, Україна,
e-mail: alinej@rambler.ru;
Лобода Володимир Васильович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
e-mail: lobvv@ua.fm

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ТРІЩИНИ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ ПЛОЩИНИ З КРУГОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Адлуцький В.Я., Годес А.Ю., Лобода В.В.

Розглядається задача плоскої деформації про визначення напружено-деформованого стану та параметрів руйнування дугової тріщини, розташованої на межі розділу площини й кругового включення з різних матеріалів, під дією довільних механічних навантажень на нескінченності. Припускається, що в процесі деформування береги тріщини можуть контактувати в межах попередньо невідомих зон. Передбачається, що при певних рівнях навантаження матеріали матриці й включення здатні деформуватися за межею пружності. Для кожного з матеріалів прийнято модель ізотропного зміцнення з використанням дволанкової апроксимації кривих "напруження-деформація".

Чисельні розв'язання зазначеної задачі в широкому діапазоні геометричних і фізичних параметрів здійснювались в середовищі пакета COSMOS/M 2.6, який реалізує процедури MCE для широкого класу задач механіки суцільного середовища. Нескінченна площа моделювалась квадратною областю з довжиною сторони на порядок більшою, ніж діаметр включення. В процесі дискретизації використовувались чотирикутні 8-вузлові скінченні елементи PLANE2D. Неоднорідні сітки скінченних елементів згущувались в околі границі між включенням і матрицею. Для моделювання можливої контактної взаємодії берегів тріщини застосовувались контактні елементи GAP, які, не перешкоджаючи розкриттю тріщини, запобігають взаємопроникненню берегів. Напруження на зовнішній границі матриці задавались відповідно до умов навантаження на нескінченності. Для стабілізації системи від переміщень як жорсткого цілого в кутах матриці добавлялись чотири стержневі елементи з жорсткістю на декілька порядків меншою ніж жорсткість матеріалів системи. Другий кінець кожного стержня жорстко закріплювався. Для отримання інформації про швидкість вивільнення енергії деформації обчислювались значення інваріантного J-інтеграла Чероєпанова-Райса вздовж декількох замкнутих контурів, достатньо віддалених від вершин тріщини. Процес навантаження здійснювався покроково, що дозволяло фіксувати поступовий перехід від чисто пружного до пружно-пластичного деформованого стану.

Результати, отримані на початкових стадіях навантаження (коли інтенсивність напружень на нескінченності не перевищує 40% від межі текучості матеріалу матриці), добре узгоджуються з точними результатами, наведеними в роботах [1,2]. В подальшому, по мірі зростання навантаження, спостерігається все більш помітне збільшення величин розкриття тріщини і значень J-інтегралів в порівнянні з аналітичними результатами лінійної теорії пружності.

1. Годес А.Ю. Контактная задача для межфазной дуговой трещины / А.Ю. Годес, В.В. Лобода // Вісник Дніпропетровського ун-ту: Серія Механіка. – 2015. – 19 (2). – С. 3–17.

2. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками, – М.: Мир. – 1990. – т.1. – 448 с.

Андрущенко Володимир Олександрович, провідний інженер,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: andron@univ.kiev.ua
Горошко Іван Олегович, кандидат фіз.-матем.наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: igoroshko@ukr.net
Нікітенко Віктор Миколайович, інженер,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: nivini55v@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ ВИСОКОДОБРОТНОГО ДИСКА НЕРІВНОМІРНОЇ ТОВЩИНИ ІЗ АЛЮМІНІЄВОГО СПЛАВУ

У доповіді подані результати експериментальних досліджень резонансних коливань дисків діаметром 250 мм з початковою товщиною 45 мм, виготовлених із високодобротного алюмінієвого сплаву типу Д16Т. Для збудження симетричних згинних і радіальних форм коливань у центр диска з однієї сторони приклеювався п'єзокерамічний диск діаметром 63 мм і товщиною 3 мм, який підключався до генератора звукових частот ГЗ-33. Дослідження форм коливань проводилися методом порошкових фігур Хладні на трьох дисках різної опуклості. Геометричні розміри і високодобротність дозволили вивчити тонкі ефекти виникнення субгармонік і ефекти накладення декількох форм коливань. Було встановлено, що перші три форми згинних і перші три форми радіальних коливань чітко реєструються на всіх дисках, і різниця між відповідними резонансними частотами дисків дуже мала і складає декілька процентів.

Особливе значення має пошук форм багатомодових коливань, які призводять до обертального руху піщинок у певних областях поверхні диска. Були знайдені декілька таких резонансних частот, розташованих в околі третьої форми радіальних коливань. Найбільш яскравий ефект спостерігався на частоті 46 кГц, де збуджувані форми зі своїми фазовими зсувами і амплітудами склалися так, що на поверхні диска утворилося 12 рівномірно розміщених по колу з радіусом $\sim R/2$ вузлових ліній, які оберталися, причому напрям обертання змінювався через одну лінію.

Чисельний аналіз поведінки такого диска виконувався за умови його рівномірної товщини. За першими двома радіальними модами були визначені модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу диска. В околі частоти 46 кГц були знайдені суперпозиційні форми, які формують обертальну кінематику.

Дослідження продовжуються і спрямовані на використання резонаторів для сепарації нанопорошків і на створення багаточастотних сенсорів, таких як акселерометри і датчики кутової швидкості.

Архипенко Костянтин Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук,
 Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
 e-mail: k_arkhipenko@ukr.net;
 Кривий Олександр Федорович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
 e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

МІЖФАЗНІ ТРІЩИНА ТА ВКЛЮЧЕННЯ, ЩО ДОТИКАЮТЬСЯ, У НЕОДНОРІДНІЙ АНІЗОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ

Архипенко К.М., Кривий О.Ф.

Розглянуто задачу про тріщину та включення, які розташовані на лінії з'єднання двох різних анізотропних півплощин і мають одну спільну вершину. На включенні задано умови повного зчеплення з анізотропними півплощинами. На нескінченості прикладені сили, що викликають на берегах тріщини навантаження $\sigma_x(\pm 0, y) = \sigma(y)$, $\tau_{xy}(\pm 0, y) = \tau(y)$, $y \in [a; 0]$. Для включення задано форми його берегів $u_{\pm}^{\pm}(y) = u(\pm 0, y)$, $y \in [0; b]$ і до нього прикладене довільне навантаження, що зводиться до рівнодіючої сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ і утворює відносно центра включення момент P_0 .

Використавши інтегральні співвідношення [1, 2], відносно невідомих стрибків напружень $H_j^-(y)$, $j=1, 2$ на включенні та похідних переміщень $H_j^-(y)$, $j=3, 4$ на тріщині, отримаємо наступну систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 (b_{kj}^{(1)} \cdot H_j^-(y) + \frac{c_{kj}^{(1)}}{\pi} \int_0^b \frac{H_j^-(t) dt}{t-y} + \frac{d_{kj}^{(1)}}{\pi} \int_a^0 \frac{H_{j+2}^-(t) dt}{t-y}) = p_k(y), k=1, 2; y \in [0; b] \\ \sum_{j=1}^2 (b_{kj}^{(2)} \cdot H_{j+2}^-(y) + \frac{c_{kj}^{(2)}}{\pi} \int_a^0 \frac{H_{j+2}^-(t) dt}{t-y} + \frac{d_{kj}^{(2)}}{\pi} \int_0^b \frac{H_j^-(t) dt}{t-y}) = p_{k+2}(y), k=1, 2; y \in [a; 0] \end{cases} \quad (1)$$

де $b_{kj}^{(l)}, c_{kj}^{(l)}, d_{kj}^{(l)}$; $j, k, l=1, 2$ залежать від пружних властивостей анізотропних півплощин. Постановку задачі завершують додаткові умови відносно невідомих у системі (1) функцій:

$$\int_a^0 H_{j+2}^-(y) dy = 0, \int_0^b H_j^-(y) dy = P_j, j=1, 2; \int_0^b H_1^-(y) y dy = P_0.$$

Система СІР (1) має нерухому особливість при $y=0$. Для визначення асимптотичної поведінки шуканих функцій в околі цієї точки отримано трансцендентне рівняння та знайдені його корені. Для розв'язання системи СІР (1) застосовано метод граничних елементів.

Отримано формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах дефектів і невідомого кута повороту включення. Наведені залежності КІН у вершинах дефектів для різних комбінацій анізотропних матеріалів при різних навантаженнях, прикладених до включення і на нескінченості.

1. Кривой А.Ф. Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости / А.Ф. Кривой, М.В.Радиолло // Изв. Ан СССР, МТТ. – 1984. – С.84-92.
2. Кривий О. (2015) [Mutual Influence of an Interface Tunnel Crack and An Interface Tunnel Inclusion in a Piecewise Homogeneous Anisotropic Space](#). *Journal of Mathematical Sciences*. 208 (4), pp. 118-124.

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ АУКСЕТИЧНОГО ПІНОМАТЕРІАЛУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Бобилев Д.Є.

Ауксетики (від грец. Αὐξητικός) – матеріали, що мають від’ємні значення коефіцієнта Пуассона. Термін введений професором Кеном Евансом (Ken Evans) з Ексетерського університету [3].

При розтягуванні матеріали-ауксетики стають товстішими в напрямку, перпендикулярному прикладеній силі. Це відбувається через шарнірно-подібну структуру ауксетика, яка деформується при розтягуванні. Така властивість може обумовлюватися властивостями окремих молекул або визначатися структурними особливостями матеріалу на макроскопічному рівні. Від матеріалів цього типу очікують хороші механічні властивості, такі як значне поглинання механічної енергії і високий опір руйнуванню.

Вченим відомі матеріали з подібними властивостями вже близько 100 років, але в даний час їм приділяють підвищену увагу. Один з перших синтетичних ауксетиків був описаний в 1987 році в статті під назвою «Foam structures with a Negative Poisson’s Ratio» («Пінні структури з від’ємним коефіцієнтом Пуассона») [5]. Композити з від’ємним коефіцієнтом Пуассона були передбачені ще в 1985 році [1, 4]. В роботі [2] отримано зв’язок пружних властивостей ряду ауксетиків з характеристиками їх мікроструктури.

В даній роботі досліджена аномалія пружності, властива ауксетичним піноматеріалам з увігнутою формою осередків, при якій коефіцієнт Пуассона приймає від’ємні значення. З метою аналізу деформування ауксетиків виділена структурна одиниця, що моделюється пружними стрижнями. Для оцінки коефіцієнта Пуассона розрахунок параметрів одноосного розтягу виконувався на підставі розрахунку поперечних і поздовжніх переміщень прямокутного фрагмента піноматеріала методом скінченних елементів. Досліджено залежність коефіцієнта Пуассона від напрямку навантаження і параметрів стержнів, як армуючої фази. Встановлено, що модель демонструє від’ємний коефіцієнт Пуассона в певних напрямках, тобто є анізотропною.

Дискретизація структури проводилася за допомогою стрижневих скінченних елементів. При розтягуванні моделі в горизонтальному напрямку нижня грань закріплювалася шарнірно для забезпечення нульових вертикальних зсувів. Для реалізації кінематичного навантаження у всіх точках правої бічної грані задавалися однакові горизонтальні зміщення u , а точкам лівої грані – аналогічні зміщення в протилежному напрямку.

1. Almgren R.F. (1985) An isotropic three-dimensional structure with Poisson’s ratio $=-1$ // *J. Elasticity*. 15. pp. 427-430.
2. Berinskii I.E. (2016) Elastic networks to model auxetic properties of cellular materials. *International Journal of Mechanical Sciences*. 115-116. pp. 481–488.
3. Evans K.E. (1991) Auxetic polymers: a new range of materials. *Endeavour*. New series. 15(4), p. 170–174.
4. Колпаков А.Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов // Прикладная математика и механика. – 1985 – № 6, с. 969-977.
5. Lakes R.S. (1987) Foam structures with a negative Poisson’s ratio // *Science*. 235(4792). pp. 1038–1040.

INFLUENCE OF THE MATERIAL ANISOTROPY ON THE LIMIT STATE OF ORTHOTROPIC PLATE WITH PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR CRACKS UNDER BIAXIAL LOADING

Bogdanova O.S.

The study of the influence of material properties on the boundary state of a plate with cracks was carried out on the basis of the solution of the problem of the stress-deformed state of the plate weakened by the periodic system of collinear cracks obtained in [1]. The stresses in the process zones, the length of these zones and the cracks opening are determined.

The critical crack opening displacement criterion is selected as a fracture criterion. The field of critical loads is determined from the ratio, together with the condition of the fusion of areas for the elimination of neighboring cracks.

The effect of material properties on the boundary state of the plate with cracks is illustrated by an example of Hoffman's strength condition, which takes into account the difference between the resistance of the material to the stretching and compression load and is a generalization of the Mises-Hill criterion. For a plane stressed state, it has the form [2]. On the basis of a modified Dugdale model, we investigate the influence of the anisotropy of the material, in particular, differences between the ultimate tensile strength and ultimate compressive strength, on the limit state of an orthotropic plate weakened by a periodic system of periodic collinear cracks under biaxial external loading.

Fig. 1 shows the boundary curves (1,2,3) obtained on the basis of the δ_c -criterion, and the curves (1', 2', 3') corresponding to the case of fusion of the process zones. Fig. 2, 3 show the dependence of the dimensionless boundary loading in accordance with the ratios of the material strength limits and for different loading acting along the line of location of the cracks. All presented results are obtained for $D/l = 5$.

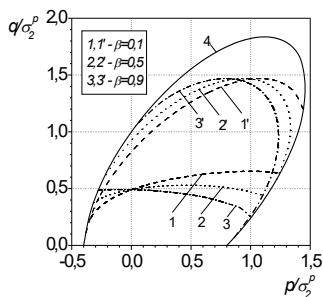


Fig.1

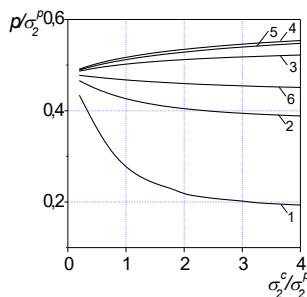


Fig.2

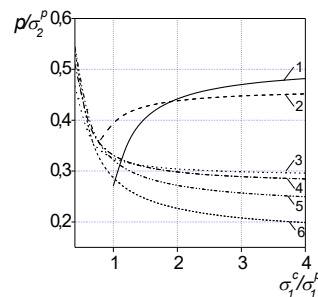


Fig.3

As can be seen from the above results, the difference between the strength of the material during tension and compression in each direction, as well as the anisotropy of the elastic properties of the material significantly affect the boundary state of the orthotropic plate with cracks.

1. Bogdanova O.S. Limiting state of an elastoplastic orthotropic plate with a periodic system of collinear cracks / Bogdanova O.S. // Int.Appl.Mech. – 2007. - 43, N5. – P.539-546.
2. Викарио А., Толандр Р. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов. – В кн.: Анализ и проектирование конструкций / Под ред.К.Чамиса. – М.: Машиностроение, 1978, с.62-107.

Борисейко Олександр Віталійович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: b12313@ukr.net;
Лебедева Ірина Валеріївна, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: Lebedevai@ukr.net;
Ящук Валерій Миколайович, доктор фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: yashchukvaleriy@gmail.com

ПРУЖНІ КОЛИВАННЯ ТА ЇХ ВПЛИВ НА ОПТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КРЕМНІЄВИХ ТА ГЕРМАНІЄВИХ НАНОЧАСТИНОК

Борисейко О.В., Лебедева І.В., Ящук В.М.

Металеві та напівпровідникові частинки, що мають характерні розміри порядку десятків *нм* проявляють особливі електронно-оптичні властивості, відмінні від таких для суцільних середовищ (bulk materials). Частинки таких розмірів називають наночастинками (nanoparticles) або квантовими точками (quantum dots). Відомо [1-3], що обмеження в розмірах частинок ≈ 100 *нм* є істотним для електронів та дірок і впливає на їхні спектральні властивості. У той же час коливання молекул чи атомів у вузлах ґратки не «відчувають» суттєвого впливу (включаючи частинки порядку розмірів 10 *нм*). Це дає підстави застосовувати теорію пружності до вивчення механічних коливань такого типу наночастинок у вказаному діапазоні розмірів. Такий підхід уже застосовано в роботі [1] для золотих наночастинок сферичної форми. Отримано вирази для радіуса наночастинки як функції часу та відповідні зміни оптичних характеристик таких наночастинок, а саме: зміну довжини хвилі максимуму оптичного поглинання (закон осциляції кольору сферичної наночастинки).

У даній роботі досліджено механічні коливання напівпровідникових сферичних та циліндричних наночастинок кремнію та германію під дією зовнішнього гармонічного в часі навантаження. Визначено спектр власних частот коливань таких об'єктів. Показано, що перші головні частоти коливань, отримані в рамках постановки задачі теорії пружності, для даного типу наночастинок перебувають у кілогерцовому діапазоні.

Подано результати досліджень ефектів модуляції механічними коливаннями електромагнітних хвиль, що поглинаються наночастинками різного типу та форми.

1. Лебедева І.В. Коливання металевих та напівпровідникових наночастинок / І.В.Лебедева, О.В. Борисейко, В.М. Ящук // Вісник Київського національного університету.- Сер.: фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 115-117.
2. Дмитрук І.М. Електронні процеси в наноструктурах. / І.М.Дмитрук.– Київ: Четверта хвиля, 2013. – 208 с.
3. Єщенко О. А. Плазмоніка. / О. А.Єщенко. – Київ: Фенікс, 2013. –176 с.

Борисейко Олександр Віталійович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: b12313@ukr.net;
Улітко Ігор Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua.
Курилко Олександр Борисович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

ТРАНСФОРМАЦІЯ РЕЗОНАНСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ П'ЄЗОЕЛЕМЕНТІВ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ В СТЕРЖНЕВИХ МОДЕЛЯХ ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Борисейко О.В., Улітко І.А., Курилко О.Б.

В задачах моделювання п'єзоелектричних резонансних перетворювачів неканонічної форми [1] виникають труднощі порівняльного аналізу отримуваних аналітично-числових результатів з даними, відомими для зразків канонічної форми, що були отримані класичними аналітичними методами. Так, при спробі побудувати повні аналітичні розв'язки задач планарних коливань непрямокутних п'єзопластин суттєво звужується можливість скористатися класичним набором власних функцій “прямокутника”, що в перспективі суттєво ускладнює аналітичне дослідження зв'язаних електропружних характеристик, таких як струм провідності на електродах та аналіз ефективності перетворювача за енергетичним критерієм. Також важко знайти задовільну інтерпретацію отриманим експериментальним та числовим даним про “специфічні” резонанси пластини неканонічної форми, які не проявляються жодним чином в класичній моделі. Тому авторами [2] було ініційоване дослідження для одновимірного об'єкта – стержня змінного поперечного перерізу при тих же самих умовах електричного навантаження та механічних крайових умовах. З'ясувалося, що розрахунок електропружних коливань стержня змінного поперечного перерізу призводить до необхідності точного аналітичного розв'язку диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, інтеграли яких подаються у вигляді нескінчених рядів, що збігаються в класі спеціальних функцій, наприклад, через функції Бесселя як у випадку чисто пружного стержня [3].

У пропонованій доповіді будуть наведені експериментальні дані АЧХ стержня з поперечною поляризацією і трапецієподібною лицевою електродованою поверхнею та результати аналітично-числових обрахунків відповідних компонентів зв'язаного електропружного поля. З аналізу резонансних рівнянь з'ясувалося та було підтверджено експериментально, що в такому стержні поряд з відомими резонансними частотами стержня сталого прямокутного перерізу проявляються й нехарактерні резонанси, пов'язані зі зміною геометричної форми. Їх ефективність, як і у випадку трапецієподібної пластини, є не значною порівняно з ефективністю основного резонансу, проте їх слід приймати до уваги в задачах розробки прицезійних п'єзоактуаторів неканонічної форми, тощо.

1. Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V.T., Soltannia B. Effect of boundary form disturbances on the frequency response of planar vibrations of piezoceramic plates. Analytical solution / Shakeri Mobarakeh P., V.T. Grinchenko, B. Soltannia // *Strength of Materials*. – 2018 – Vol. 50 (3). – P. 1-11.
2. Борисейко О.В., Шакері Мобаракє П., Улітко І. А. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня змінного поперечного перерізу / О.В. Борисейко, Шакері Мобаракє П., І. А. Улітко // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка: Сер. Фіз.-мат. науки*. – 2016. – № 3. – С. 31-34.
3. Kirchhoff G. *Gesammelte Abhandlungen* / Kirchhoff G. – Leipzig: Johan Ambrosius Barth, 1882. – S. 339-351.

Васільєв Кирил Володимирович, Кандидат фіз.-мат. наук, н.с.,
ІППММ ім. Я.С. Підстригача, НАН України, Львів, Україна,
e-mail: kirill.all@gmail.com
Сулим Георгій Теодорович, доктор фіз.-мат. наук, проф.,
Львівський національний університет ім. І.Франка, Львів, Україна,
e-mail: sulym@lnu.edu.ua

ПРУЖНА РІВНОВАГА АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПРУЖНИМ АНІЗОТРОПНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Васільєв К.В., Сулим Г.Т.

Раніше розроблений метод прямого вирізування [1] узагальнено на випадок врахування анізотропії матеріалу. Основа методу полягає у моделюванні вихідної задачі визначення напруженого стану обмеженого тіла з тонкими включеннями (зокрема, тріщинами) за допомогою простішої задачі пружної рівноваги нескінченного простору зі збільшеною кількістю тонких дефектів, які у свою чергу формують межі досліджуваного тіла.

Апробація запропонованого підходу здійснена на задачі визначення напруженого стану півпростору з довільно орієнтованим стрічковим тунельним пружним включенням за поздовжнього зсуву.

Розглядається нескінченний анізотропний (ортотропний у напрямку) півпростір із тонкою стрічковою анізотропною неоднорідністю. Межа півпростору може бути вільною від навантаження або жорстко защемленою. Тонке тунельне стрічкове включення L_1 має довжину $2a_1$ та ширину $2h_1$. Центр неоднорідності знаходиться у точці $O_1(0, y_{01})$. Кут орієнтації включення щодо осі абсцис – φ_1 . Пружні характеристики матеріалу півпростору і включення a_{ij} і a_{ij}^{in} ($i, j = 4; 5$) відповідно. Навантаження задане зосередженими силами інтенсивності Q_j у точках $z_{0j}^* = x_{0j}^* + iy_{0j}^*$.

Застосувавши метод прямого вирізування вихідна задача зводиться до дослідження нескінченного простору з двома тонкими неоднорідностями L_0, L_1 , де L_0 з центром у точці $O_0(0, 0)$, та кутом орієнтації щодо осі абсцис $\varphi_0 = 0$ формує межу півпростору. Вільну від навантаження межу моделюємо за допомогою дуже податного матеріалу включення L_0 , а жорстко защемлену – за допомогою дуже жорсткого матеріалу включення L_0 .

З використанням методу функцій стрибків та умов взаємодії пружних стрічкових дефектів з матрицею [2] задача зводиться до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків напружень та похідних від переміщень. Розв'язування побудованої системи здійснено з використанням методу колокацій.

Досліджено вплив відносної довжини включення L_0 на збіжність узагальнених коефіцієнтів напружень включення L_1 . Результати порівняно з відомими з літератури.

1. Васільєв К.В. Метод прямого вирізування у задачах кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами за поздовжнього зсуву /К.В. Васільєв, Г.Т. Сулим / Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**. № 4. – С.44-57.
2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. Центр НТШ, 2007. – 716 с.

Вовк Ігор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна;
Маципура Володимир Тимофійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
mnivtt@gmail.com

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЧАСТКОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Вовк І.В., Маципура В.Т.

Як відомо [1], метод часткових областей широко і ефективно застосовується при вивченні проблем, пов'язаних з випромінюванням і розсіюванням хвиль різної природи. Але основні результати, досягнуті за допомогою цього методу, відносяться до тих випадків, коли суміжні області не перетинаються (тобто мають тільки одну загальну межу). У випадках, коли суміжні частинні області перетинаються (можуть мати дві загальні межі) традиційні способи застосування методу часткових областей можуть виявитися не ефективним [2].

В статті [3] описано підхід, котрий дозволяє застосувати метод часткових областей у випадках, коли суміжні частинні області перетинаються (мають непусте перетинання, котре виділене двома межами). Суть підходу полягає у тому щоб, замість двох умов на одній межі (рівність функцій і нормальних похідних), вимагати виконання по однієї умови на кожній з меж області перетинання. Ця умова має вигляд, певним чином підібраної, лінійної комбінації умов щодо функцій і їх нормальних похідних.

Дана робота являє собою подальший розвиток застосування методу часткових областей до випадків, коли суміжні області перетинаються. Показано, що на кожній з меж області перетинання можна задати одну з умов, а саме, рівність функцій з обох сторін межі, або рівність нормальних похідних функцій. Така постановка граничної задачі можлива за виключенням ситуацій, коли хвилеве число є власним хвильовим числом для відповідної граничної задачі області перетину частинних областей. Запропонований підхід проілюстровано розрахунками для задачі про проходження хвилі крізь зону спряження плоского і клинуватого хвильоводів.

1. Гринченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Волновые задачи акустики. – Киев : Интерсервис, 2013. – 572 с.
2. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Миттра Р.М. : Мир, 1977. – 485 с.
3. Вовк І.В., Гомилко А.М., Городецкая Н.С. Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах // Акустический журнал. – 1995. – Т. 41, № 3. – С. 399-404.

НЕУСТАЛЕНИЙ ТЕПЛОВИЙ СТАН ТРИШАРОВОГО ПОРОЖНИСТОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА УМОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Гарматій Г.Ю.

При дослідженні термопружного стану кусково-однорідних елементів конструкцій, що знаходяться в умовах високотемпературного нагрівання, важливе значення має визначення розподілу температурного поля. Знаходження розв'язку задачі теплопровідності значно ускладнюється у випадку складного теплообміну з врахуванням залежності від температури теплофізичних характеристик матеріалу (термочутливості) [1]. Тут пропонується чисельне розв'язування нестационарної нелінійної крайової задачі теплопровідності з розривними коефіцієнтами для порожнистого тришарового термочутливого циліндра за конвективного теплообміну на внутрішній та зовнішній поверхнях.

Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) порожнистий тришаровий циліндр з внутрішнім радіусом r_0 , і зовнішнім R ($r_2 - r_1$ – товщина проміжного шару). Температура циліндра залежить лише від радіуса r та часу τ . Коефіцієнт теплопровідності $\lambda(r, t)$ та об'ємна теплоємність $c(r, t)$ матеріалу залежать від температури і є кусково-неперервними функціями. Початкова температура циліндра стала і рівна t_p . Рівняння теплопровідності для визначення нестационарного температурного поля в такому циліндрі має вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c(r, t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad r_0 < r < R, \quad (1)$$

$$\lambda(r, t) = \begin{cases} \lambda^{(1)}(r, t), & r_0 \leq r < r_1, \\ \lambda^{(2)}(r, t), & r_1 < r < r_2, \\ \lambda^{(3)}(r, t), & r_2 < r \leq R, \end{cases} \quad c(r, t) = \begin{cases} c^{(1)}(r, t), & r_0 \leq r < r_1, \\ c^{(2)}(r, t), & r_1 < r < r_2, \\ c^{(3)}(r, t), & r_2 < r \leq R. \end{cases} \quad (2)$$

Для рівняння теплопровідності (1) з розривними коефіцієнтами (2) виконуються умови неперервності температури і теплового потоку на межі контакту шарів:

$$t|_{r=r_i-0} = t|_{r=r_i+0}, \quad \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_i-0} = \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_i+0}, \quad i = 1; 2.$$

На внутрішній поверхні циліндра $r = r_0$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого є функцією часу і через поверхню $r = R$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого є функцією часу:

$$\lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - \alpha_1 (t|_{r=r_0} - t_{c0}(\tau)) = 0, \quad \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha_2 (t|_{r=R} - t_R(\tau)) = 0.$$

Запропонована методика розв'язку задачі включає консервативну дискретизацію за змінною r інтегро-інтерполяційним методом та чисельне розв'язування отриманої напівдискретної задачі.

1. Кушнір Р.М., Попович В.С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 410 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.

Katica R. (Stevanović) Hedrih, Dr. Sci. of Technical Sciences, Full Professor of Theoretical and Applied Mechanics,
Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts (SANU), Serbia,
e-mail: katicah@mi.sanu.ac.rs; khedrih@eunet.rs; khedrih@sbb.rs; katicahedrih@gmail.com

FRACTIONAL TYPE MODES OF FREE AND FORCED TRANSVERSAL VIBRATIONS OF AN HYBRID MULTI-MEMBRANE SYSTEM

In memory of Scientist Oleg Aleksandrovich Goroshko (January 1, 1925- September 1, 2017)

Hedrih (Stevanović) R. Katica

Hybrid systems of fractional type with multi-deformable membranes has very complex dynamics. In the Reference [2] a model of hybrid multi membrane fractional order oscillations is presented and corresponding partial fractional order differential equations are solved. Also, the generalized function of fractional order energy dissipation [1] is introduced. For obtaining solution, Euler-Bernoulli method of particular integral is used. The transformation of the system of ordinary fractional order differential equations along eigen time functions introducing eigen main coordinates of fractional order system, a system of independent fractional order differential equations only along one main coordinate are obtained. In this paper an advanced analysis of independent fractional type modes of free and hybrid modes of forced vibrations of these hybrid multi-membrane systems is performed. The analyses are based on author's previous published results of the analytical dynamics and vibrations of the fractional type discrete and discrete continuum hybrid systems [2, 3, 4].

Independent fractional type hybrid forced modes appear in each eigen time functions of each of the eigen amplitude forms in both free and forced regimes of transversal vibrations of discrete continuum multi-membrane system.

Number of the independent fractional type modes in each of the eigen time function of each of the eigen amplitude shape is equal to number of the coupled membranes. The main new result, presented in this paper, is the description of the forced fractional order vibrations with corresponding analytical approximate solution expressed by integral of the convolution and Laplace transformation. On the basis of this result it is possible to define independent fractional order hybrid modes in hybrid multi-membrane system.

Acknowledgement. Parts of this research were supported by the Ministry of Sciences of Republic Serbia through Mathematical Institute SANU Belgrade Grants OI 174001 "Dynamics of hybrid systems with complex structures. Mechanics of materials."

References

1. Hedrih (Stevanović) K., (2014), Generalized function of fractional order dissipation of system energy and extended Lagrange differential Lagrange equation in matrix form, *Dedicated to 86th Anniversary of Radu MIRON'S Birth., Tensor*, Vol. 75, No. 1. pp. 35-51. Tensor Society (Tokyo), c/o Kawaguchi Inst. of Math. Soc. , Japan.. ISSN 0040-3604.
2. Hedrih (Stevanović) K., (2014), *Multi membrane fractional order system vibrations*, Theoretical and Applied mechanics, Series: Special Issue – Dedicated to memory of Anton D. Bilimović (1879-1970), Guest Ed.: Katica R. (Stevanović) Hedrih and Dragoslav Šumarac, 2014, Vol. 41 (S1), pp. 43-61. DOI : 10.2298/TAM14S1043H . ISSN 1450-5584
3. Katica R. (Stevanović) Hedrih, (2018), Analytical Dynamics of Fractional Type Discrete System, Review paper, *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 11, 2018, no. 1, 15 - 47. <https://doi.org/10.12988/atam.2018.883>
4. K.R. Hedrih (Stevanović), J.M. Tenreiro Machado, (2013), Discrete fractional order system vibrations, *International Journal Non-Linear Mechanics (January 6, 2014)*, Volume 73, July 2015, Pages 2–11, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.009 ; ISSN 0020-7462.

ЩОДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ПОВЗУЧОСТІ ТОНКОСТІННИХ ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ ІЗОТРОПНИХ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Голуб В.П.

Розв'язується задача апробації визначальних рівнянь повзучості ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану на прикладі визначення деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом та скрученням.

Визначальні рівняння повзучості у формі залежності між компонентами тензорів деформацій ε_{ij} та напружень σ_{ij} та часом t за умов постійної температури записуються у вигляді

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)), & (i, j = \overline{1,3}) \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (1)$$

де ядра інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ та об'ємної повзучості $K_v(t)$ задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \lambda_i K_i(t) &= \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) + \psi_{22}(\sigma_{11})}; \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2\psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - 2\psi_{22}(\sigma_{11})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$ – ядра повздовжньої та поперечної повзучості за умов одновісного розтягу; $\psi(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей; λ_{ii} – реологічні параметри.

На рис. 1 результати розрахунків (лінії) деформацій повздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ та зсувної $\varepsilon_{21}(t)$

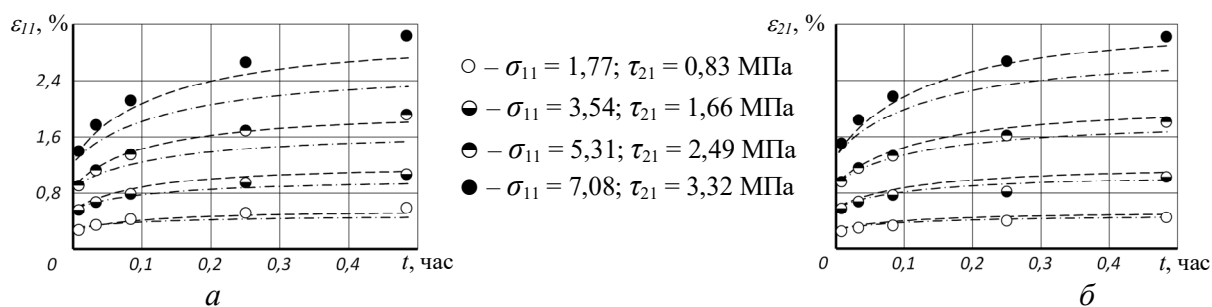


Рис. 1

повзучості тонкостінних трубчастих зразків із „поліетилену високої щільності ПЭВП”, що виповнені за рівняннями (1) із урахуванням (2) та використанням дробово-експоненційних ядер повзучості при різній комбінації нормальних та дотичних напружень, порівняно із експериментальними даними (точки) і отримано задовільне узгодження розрахунків із експериментом.

Горошко Іван Олегович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: igoroshko@ukr.net
Білий Валерій Олександрович, кандидат фіз.-мат. наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: valeri_y@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ГНУЧКИХ КРИЛ ЛІТАКІВ З ПАЛИВОМ У ВНУТРІШНІХ БАКАХ

Горошко І.О., Білий В.О.

У сучасному літакобудуванні в останні роки широко використовуються конструкційні елементи з вугле- та склокомполімерів, які при однаковій міцності з металевими відповідниками мають значно меншу масу. Так, наприклад, Boeing 787 побудований головним чином з композитних матеріалів, завдяки чому він має на 20% вищу паливну ефективність ніж його попередник Boeing 767. При цьому його крила, виготовлені переважно з вуглепластику, мають набагато більш високу гнучкість порівняно з традиційними металевими крилами. Така ж тенденція спостерігається і при конструюванні менших середньомігстральних літаків, напр. Bombardier CSeries – зараз Airbus A220, MC-21.

У процесі експлуатації літаків з крилами такого типу виникають проблеми їх міцності та керованості внаслідок великих амплітуд коливань з інтенсивним плесканням (sloshing) палива в крилових баках. Тому актуальними є задачі дослідження коливань оболонкових конструкцій, якими є крила літаків з урахуванням руху рідини всередині баків. Ці задачі відносяться до проблем складного типу – взаємодії рідина-конструкція (fluid-structure interaction – FSI).

Фундаментальною основою досліджень такого класу задач є теорія оболонкових та балкових структур, які, в свій час, є складовими конструкції крил літаків у комбінації з гідромеханікою в'язкої рідини. При цьому задачі ускладнюються завдяки необхідності врахування динаміки рідини у баках з вільною поверхнею, а також порушенням цілісності області, що займає рідина при її плесканні.

Аналітичне дослідження таких задач крім найпростіших випадків є практично неможливим, тому в цій області широко застосовується чисельне моделювання із використанням сучасних пакетів чисельного моделювання та потужних комп'ютерів. У даному дослідженні пропонується здійснювати розрахунки за допомогою вільних пакетів CalculiX (пружна частина моделі) та OpenFOAM (динаміка рідини та газу).

Для ефективного дослідження динаміки крилових структур з урахуванням процесів плескання палива у баках послідовно розглядається низка модельних задач з наростанням їх складності.

Однією з цілей роботи є також апроксимація складних видовжених оболонкових структур більш простими моделями балочного типу, що має дозволити значно скоротити об'єм обчислень при реалізації пружної частини FSI.

Aleksandr Yaroslavovich Grigorenko, Doctor of Sciences, Professor, Head of Numerical Methods Department,

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,

e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

Wolfgang H. Müller, Doctorate in Natural Sciences, Professor, Chief of Institute,

Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie, Technische Universität Berlin, Germany,

e-mail: wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de

Yaroslav Michailovich Grigorenko, Academician of NAS of Ukraine, Doctor of Sciences, Professor,

Leading Research Fellow of Numerical Methods Department,

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,

e-mail: yamgrigorenko@gmail.com

NUMERICAL STUDYING OF FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL BODIES MADE OF FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS

Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M.

Analysis of vibrations of hollow finite-length cylinders, which are widely used in various fields of engineering, instrument-making industry, and construction, is of great importance in view of subsequent development of fundamental researches as well as different applications. The newly formed and actively developing theory of functional gradient materials (FGM) concentrates researchers' attention at artificially created heterogeneous composite materials with smoothly changing physical properties in a given direction without any transitional layers and interfaces. The mechanical parameters of such materials can be controlled by specifying the necessary distribution in one of the directions. FGMs are widely used in engineering, radio industry, instrumentation, medicine. A great practical interest and importance is paid for further development of fundamental research of the dynamic behavior of constructive elements from FGM of various geometric forms, including cylinders of finite length. . It should be noted that one of the important aspects of ensuring effective modes of operation of the marked elastic bodies is to obtain information on the characteristics of their free oscillations. Increased requirements for evaluation of strength properties, the desire to consider real properties of materials more fully, the identification and study of three-dimensional effects that occur in thick-walled elements lead to the need to calculate the dynamic characteristics of bodies from the FGM in a spatial setting. The presented report is aimed at solving two-dimensional boundary-value eigenvalue problems that describe natural vibrations of the finite length cylinders, made o FGM based on discrete-continual approach. However, along with universal approaches (FEM) to the solution of problems in 3D elasticity theory, so-called discrete-continual approaches are widely used, which make it possible to reduce the problem to ordinary differential equations on the basis of approximating solutions to other variables by means of analytical tools. To solve the obtained one-dimensional problems, the stable numerical method of discrete orthogonalization was used. On the basis of the proposed approach, the problem of free vibrations of an heterogeneous cylinder of finite length with continuously varying elastic properties in the radial direction under different boundary conditions at the ends has been solved. Functional gradient cylinder material which comprises of stainless steel and nickel has been considered.

Гринченко Виктор Тимофеевич, академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, проф.,
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина;
Зражевский Григорий Михайлович, канд. физ.-матем. наук, доцент,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,;
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua ;
Шакери Мобарак Пуян,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
rouyan.shakeri@gmail.com

О МЕТОДЕ АНАЛИЗА СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Гринченко В.Т., Зражевский Г.М., Шакери Мобарак Пуян

Используется модель мембраны, которая порождает граничную задачу для волнового уравнения. Конкретные задачи рассматриваются для случая гармонических колебаний с определением спектра собственных частот и частотных зависимостей амплитуд вынужденных колебаний.

Предложен подход, позволяющий получить аналитические представления для функции прогиба мембран сложной формы. Метод применим при анализе колебаний мембран, границы которых образованы отрезками прямых с произвольным числом отрезков.

Конкретные расчеты представлены для параллелограммных мембран. Полученные количественные оценки иллюстрируют возможности метода и эффективность вычислительных процедур.

Гуржий Александр Андреевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
НТУУ “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”, Киев, Украина,
e-mail: a.gourjii@gmail.com;
Кордас Ольга, PhD, профессор,
Королевский технологический институт, Стокгольм, Швеция,
e-mail: olga@kth.se;
Никифорович Евгений Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-кор. НАН Украины,
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: eugnik@gmail.com;
Осадчий Владимир Иванович, доктор геог. наук, член-кор. НАН Украины, профессор,
Украинский научно-исследовательский гидрометеорологический институт ГСЧС Украины и НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: osad@uhmi.org.ua;
Черний Дмитрий Иванович, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина,
e-mail: dmytro.cherniy@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ В РЕЧНЫХ СИСТЕМАХ

Гуржий А.А., Кордас О., Никифорович Е.И., Осадчий В.И., Черний Д.И.

Целью работы является формирование математической модели процесса переноса выделенной жидкости поверхностными течениями в дельтах речных систем с учетом влияния силы и направления ветра, выявление основных закономерностей процесса переноса жидкости во внутренних течениях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей.

Для решения гидродинамической задачи в работе применялся метод дискретных особенностей, адаптированный к задачам переноса поверхностными течениями [1]. Основная идея метода заключается в использовании аналогии между потенциальными и циркуляционными течениями. В этом случае можно искусственно зафиксировать одну из линий тока течения, пространственное положение которой будет совпадать с геометрией границы течения. Для реализации этой идеи в методе дискретных особенностей используется N система точек коллокаций, которые располагаются на береговой линии, и система N фиксированных в пространстве точечных вихрей с интенсивностями, которые подлежат определению. Математическая модель допускает учесть влияние ветра на процессы распространения выделенной пассивной жидкости (загрязнения) в рассматриваемом течении. Для этого в динамическую систему вводится система вихревых вихрей [2], расположенная над расчетной поверхностью.

В докладе обсуждается иллюстрационный пример эволюции поверхностного загрязнения в Днепровско-Бугском лимане, сформированным в низовье р.Днепр и р.Южный Буг. Показано, что действие ветра приводит к значительным изменениям в движении поверхностного загрязнения. В частности, образование циркуляционных зон течения приводит к заметному замедлению скорости движения загрязнения и его смещению в поперечном направлении по отношению к основному потоку.

1. Гуржий А.А. Адаптированный метод дискретных особенностей к задаче адвекции пассивной примеси морскими течениями / А.А.Гуржий, Д.И.Черний // Прикладная гидромеханика. – Т.11, N.2. – 2009. – с.30-39.

2. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O.Kordas, A.Gourjii, E.Nikiforovich, D.Cherniy // J. Envir. Acc. Manag. – Vol.5, N.2. – 2017. – p.87-104.

Демидов Олександр Володимирович,
 Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
 e-mail: alexandr.v.demidov@gmail.com;
 Попов Всеволод Геннадійович, доктор фіз.-мат. наук, професор
 Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
 e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

АНАЛІЗ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ КРУТІННІ У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ З КІЛЬЦЕВОЮ ТРІЩИНОЮ

Демидов О.В., Попов В.Г.

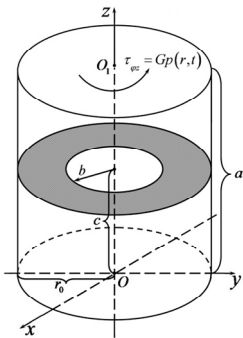


Рис. 1. Циліндр з тріщиною.

Розглядається скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу з висотою a і радіусом r_0 (Рис. 1). З циліндром пов'язана циліндрична система координат, центр якої співпадає з центром жорстко зафіксованої нижньої основи. До верхньої основи у початковий момент часу ($t=0$) прикладене крутне навантаження $G \cdot p(r, t)$. На висоті $z=c$ паралельно торцям циліндра, міститься зовнішня кільцева тріщина, яка займає область $b \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Бічна поверхня циліндра і поверхня тріщини вважаються вільними від напружень.

За цих умов циліндр перебуває у стані вісесиметричної деформації крутіння й відмінним від 0 буде тільки кутове переміщення $w(r, z, t)$, яке задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

з нульовими початковими умовами і наступними граничними умовами:

$$w(r, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(r, a, t) = p(r, t), \quad \tau_{\varphi r}(r_0, z, t) = 0, \quad \tau_{\varphi z}(r, c, t) = 0, \quad b \leq r \leq r_0.$$

Для розв'язання сформульованої початково-крайової задачі було застосовано підхід, який ґрунтується на різницевій апроксимації тільки похідних за часом і детально викладений у [1]. Скориставшись перетвореннями, аналогічними до викладених у [2], задачу звели до послідовності крайових задач для однорідного рівняння Гельмгольца. Кожна така задача розв'язується із застосування інтегральних перетворень Фур'є і Ганкеля окремо для двох частин циліндра, розділених площиною розміщення тріщини. Отримані інтегральні подання для кутового переміщення містять невідомі дотичні напруження, які діють у площині тріщини. Для їх визначення, з умови неперервності кутового переміщення в цій площині, було отримано інтегральне рівняння.

Далі, інтегральне рівняння, за відомою методикою [3], було зведено до рівняння Фредгольма другого роду, наближений розв'язок якого дозволив отримати формули для розрахунку КІН у вузлах розбиття за часом. За допомогою цих формул було проведено числове дослідження впливу різних факторів на значення КІН у часі.

1. Savruk M. P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics. *Materials Science*. 2003. Vol. 39, No 4. P. 465–471.
2. Demydov O. V., Popov V. H. Stressed State in a Finite Cylinder with a Circular Crack at Non-stationary Torsion. *Проблеми машинобудування*. 2018. Vol. 21, No 4. P. 22–29.
3. Popov V. H. Torsional oscillations of a finite elastic cylinder containing an outer circular crack. *Materials Science*. 2012. Vol. 47, No 6. P. 746–756.

Seied Hosein Dibajian, *Assistant professor, Assistant professor of applied design department, Faculty of mechanical and energy systems engineering, Shahid Beheshti University,*
e-mail: Dibajian@yahoo.com
Elham Kavian, *Masters student of mechanical engineering, Faculty of Engineering, Islamic Azad University of Najaf Abad Isfahan,*
e-mail: Elham_kvn@ymail.com

INVESTIGATION THE EFFECT OF NON-UNIFORM VOIDS ON THE FINAL STRENGTH OF ENGINEERED POROUS MATERIALS

S. H. Dibajian, E. Kavian

The porous materials, as they are known, are solid materials that have porosity in their structure. These materials have two phases: one phase is a solid (body) and the other phase is liquid or gas that is found abundance in nature. At present, the equations in multi-scale analysis are limited to stress and strain mean values. These relations have a lot of errors to calculate the failure of strength materials. Therefore considering the other statistical quantities such as variance, maximum magnitude and etc is also important in recognizing the macroscopic nature of the material through microscopic simulation. In this project, the first is to analyze and simulate the mechanical behavior of the material, assuming that the porous material contains spherical cavities, and considering the effect of the lack of uniformity of the cavities, random sizes and random location of the cavities will be considered. Calculations of the mechanical properties of compound material before failure are performed numerically using MATLAB software and then ABAQUS software and the results are compared. Then using ABAQUS software, more precise knowledge of the strength of porous materials and their relationship with microstructures will be achieved to improve the microstructure of porous materials. It should be noted that in multi-scale methods, generally the mean value is used to calculate macro properties. However, concepts such as failure and fatigue are related to other statistical quantities such as variance. Accordingly, the main objective of this project is to analyze the distribution effects and the size of the cavities on the final strength of the porous material using statistical quantities.

1. FARZIN, M., MAHDIAN, A., DIBAJIAN, S.H., HOSSEINIFARID, M. (2014) *An Introductory and Training book for ABAQUS Software*. (Isfahan University of Technology Publication Center). [In Persian]
2. DONG, CHENSONG (1987) *Effects of Process-Induced Voids on the Properties of Fibre Reinforced Composites*. Australia: Curtin University, Department of Mechanical Engineering. (journal of Materials Science & Technology)
3. LU-PING CHAO, HUANG JIN H. (1999) *Prediction of Elastic Moduli of Porous Materials with Equivalent Inclusion Method*. (Journal of Reinforced Plastics and Composites) Feng China University.
4. HIDEKAZU SUENO, MASAKAZU TANE, JAE-SOUNG PARK, SOONG-KEUN HYUN AND HIDEO NAKAJIMA (2006) *Size Effects on Tensile Strength of Lotus-Type Porous Copper*. Japan: Osaka University, The Institute of Scientific and Industrial Research. (Materials Transactions, Vol. 47, No. 9 (2006) pp. 2203 to 2207)
5. Gong S., Li Z., Zhao Y.Y. (2011) *An extended Mori-Tanaka Model for the elastic moduli of porous materials of finite size*. (Acta Materialia Inc. Published by Elsevier Ltd)
6. MANOYLOV, A.V., BORODICH, F.M., EVANS H.P. (2011) *Modelling of elastic properties of sintered porous materials*. (Royal Society Publishing)

Діденко Юрій Федорович, кандидат фіз. – мат. наук, доцент,
Київський національний торговельно-економічний університет, Київ, Україна;
Денисенко Володимир Іванович, кандидат фіз. – мат. наук, доцент,
Київський національний торговельно-економічний університет, Київ, Україна,
e-mail: d0212@ukr.net
Щетініна Олена Костянтинівна, доктор фіз.– мат.наук, професор,
Київський національний торговельно-економічний університет, Київ, Україна.
e-mail: elena-0607@ukr.net .

ПРО ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРОСТОРОВОЇ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ДВОХ СФЕР

Діденко Ю.Ф., Денисенко В.І., Щетініна О.К.

Механіка композитних матеріалів висуває ряд задач, які можна віднести до задач деформування гомогенних середовищ. У роботі (1) побудовано точний розв'язок для пружного середовища, яке містить довільно розташовані сферичні включення. У даній роботі розглядається задача для двох сферичних провідників однакового радіусу R_0 зі сталими потенціалами $\pm V_0$. Відстань між центрами сфер дорівнює $2a$, при цьому $a > R_0$. Відомо (1), що точний розв'язок такої задачі зводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь.

У роботі запропоновано явний розв'язок такої нескінченної системи рівнянь методом послідовних наближень та методом перерозкладання (2). Такий підхід можна застосувати у більш складних задачах математичної фізики, які не допускають точного розв'язку.

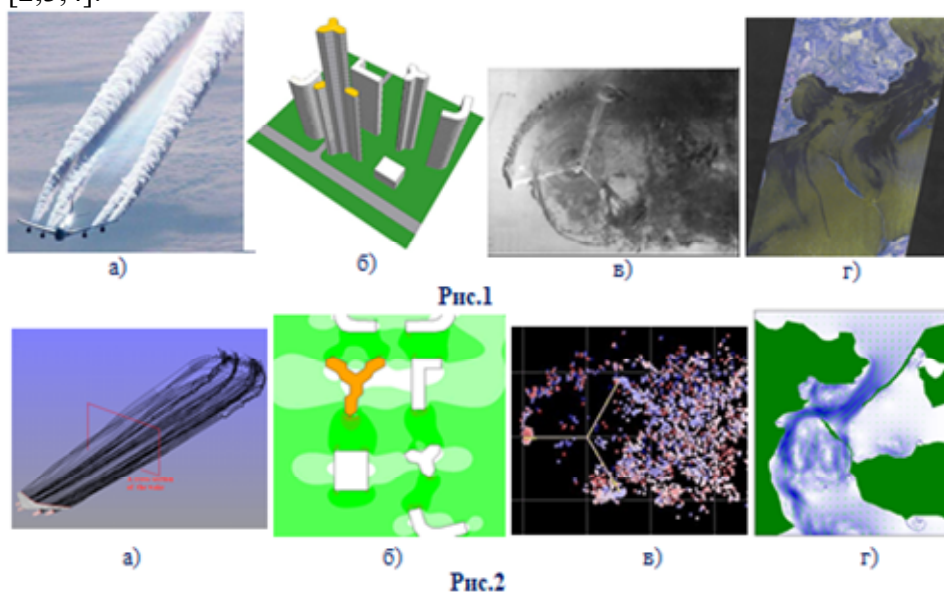
Різні види подачі розв'язків можуть виявитися корисними при визначенні задач електростатики, акустики і теорії пружності зі сферичними включеннями.

1. Діденко Ю.Ф., Денисенко В.І. Основні співвідношення для розрахунку пружного поля в середовищі із сферичними включеннями / Ю.Ф. Діденко, В.І. Денисенко // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016, т.13, №3. – С.99-104
2. Діденко Ю.Ф., Денисенко В.І., Щетініна О.К. Точний розв'язок задачі просторової теорії потенціалу для двох сфер / Ю.Ф. Діденко, В.І. Денисенко, О.К. Щетініна // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2018, т.15, №1. – С.1-11.

Довгий Станіслав Олексійович, доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору, НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: s.dovgii@gmail.com;
 Черній Дмитро Іванович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, факультет комп'ютерних наук та
 кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: D_Cherniy@ukr.net

МЕТОД ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ І МЕХАНІКИ

Початок застосування дискретних особливостей (у вигляді точкових та лінійних вихорів) для розв'язання задач математичної фізики (переважно, для розв'язання тривимірних задач обтікання несучих поверхонь) було покладено в другій половині XX століття, у науковій школі С.М.Білоцерковського (за участю В.А. Апарінова, А.В.Дворака, І.К.Ліфанова, І.Я.Тимофєєва, С.О.Довгого [1,2]). В доповіді представлено розвиток (у ХХІ сторіччі) методу дискретних особливостей вже як чисельного методу для розв'язання граничних сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачах математичної фізики і поширення його застосування на інші предметні області (як базисного методу для обчислювальних технологій моделювання еволюційних процесів: Рис.1, Рис.2), в галузях механіки, аеро/гідродинаміки, енергетиці, гідрології, геодинаміки, екології, електродинаміки, дифракції хвиль, фільтрації та інш., який призвів до формування нових наукових шкіл [2,3,4].



1. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. — М.: Наука, 1985.— 253 с.
2. Довгий С.А. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии / С.А.Довгий, И.К. Лифанов, Д.И. Черний. — К.: Юстон, 2016. — 380с.
3. Довгий С.О. Алгоритмы методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій / С.О. Довгий, С.І. Ляшко, Д.І. Черній // Кибернетика и системный анализ.— 2017. — №6. — С.147-159.
4. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach //O.Kordas, A.Gourjii, E.Nikiforovich, D.Cherniy // Journal of Environmental Accounting and Management.—2017.—Vol.5,N2—p.87-104.

Довжик Михайло Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: dovzhyk.m.v@ukr.net;
Назаренко Володимир Михайлович, чл.-кор. НАН України, д.т.н., професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: nazvml@gmail.com

РУЙНУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ ТА ВИСОКОЕЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ДИСКОПОДІБНОЇ ТРІЩИНИ

Довжик М.В, Назаренко В.М.

Вивчення руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин є окремою проблемою механіки руйнування. В цьому випадку неможливо використовувати критерій Гріффітса-Ірвіна то інші підходи, запропоновані в рамках класичної механіки руйнування. Існує два підходи для дослідження таких задач [1]. Перший ґрунтується на використанні наближених розрахункових схем, коли відокремлені тріщинами (тріщиною та вільною поверхнею) елементи заміняють балкою, пластиною або оболонкою. Але цей метод має суттєві недоліки: потрібно проводити окремі дослідження для визначення можливості його застосування з точки зору тонкостінності та умов закріплення виділеного тріщинами елемента. Другий підхід в якості критерію руйнування використовує критерій локальної втрати стійкості матеріалу в околі тріщини в межах тривимірної лінеаризованої теорії пружності. За цим підходом руйнування ініціює момент локальної втрати стійкості матеріалу поблизу тріщин, а критичні параметри стиску визначають з розв'язання відповідних задач на власні значення, скориставшись тривимірною лінеаризованою теорією стійкості деформівних тіл.

В рамках другого підходу, визначення критичних напружень для півпростору під час стиску вздовж приповерхневої дископодібної тріщини зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь з допоміжною умовою

$$\begin{aligned} f(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\ g(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$
$$(0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1); \quad f(\xi) \equiv \varphi(a\xi); \quad g(\xi) \equiv \psi(a\xi).$$

з відповідними ядрами для композитних та високоеластичних матеріалів.

Скориставшись чисельно-аналітичною метою запропонованою в [2] для розв'язання (1), вдалось отримати межі застосування наближених розрахункових схем, як з точки зору тонкостінності так і з точки зору умов закріплення для високоеластичних та композитних матеріалів.

1. Гузь А.Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) / А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 1. – С. 5–88.

2. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / А.Н. Гузь, М.В. Довжик, В.М. Назаренко // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 6. – С. 28–37.

Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Уманський державний педагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dudik_m@hotmail.com
Решітник Юлія Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук
Уманський державний педагогічний університет, Умань, Україна
e-mail: dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

КОГЕЗІЙНА МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Дудик М.В., Решітник Ю.В.

Відсутність симетрії в полі напружень біля вершини міжфазної тріщини при побудові моделі зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі приводить до необхідності врахування стрибків як відривних, так і зсувних деформацій. Такі ефекти враховуються у когезійній моделі міжфазної зони передруйнування, що активно розвивалась впродовж останніх десятиліть. В когезійній моделі вводиться деяка потенціальна функція, яка визначає зв'язок напружень зі стрибками переміщення. Складність визначальних рівнянь в когезійній зоні призвела до того, що їх розв'язання здійснюється головним чином числовими методами.

В даній роботі здійснено аналітичний розрахунок параметрів зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу, з використанням для напружень притаманної когезійній моделі квадратичної умови передруйнування. Задача зведена до векторного рівняння Вінера-Гопфа з матричним коефіцієнтом, який не допускає точну факторизацію у замкнутій аналітичній формі. Подаючи матричний коефіцієнт у вигляді суми двох матриць, одна з яких відповідає рівнянню Вінера-Гопфа аналогічної задачі про когезійну зону в кінці тріщини на плоскій межі поділу і факторизується за допомогою формул Храпкова [1, 2], а стосовно іншої передбачається малість порівняно з першою матрицею, було розвинуто метод наближеного розв'язання вихідного рівняння задачі. З його допомогою у першому наближенні теорії збурень знайдено рівняння для визначення довжини зони передруйнування, фазового кута навантаження в ній та розкриття тріщини в її вершині.

За результатами числових розрахунків виконано аналіз залежності параметрів зони передруйнування від модуля і конфігурації зовнішнього навантаження та відношення опорів з'єднувального матеріалу відриву і зсуву при окремих значеннях кута зламу межі поділу, близької до площини. Встановлено, що довжина зони передруйнування та її розкриття у вершині тріщини нелінійно зростають за величиною зі збільшенням зовнішнього навантаження. Залежність фазового кута навантаження у зоні від модуля навантаження менш виражена, проте також спостерігається повільне зростання кута зі збільшенням навантаження. Зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження довжина зони передруйнування і розкриття тріщини у вершині зменшуються. Залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута навантаження і кута зламу виявляється немонотонною, що в цілому є характерним у випадку міжфазної тріщини у кусково-однорідному тілі з ламаною межею поділу.

1. Khrapkov A.A. Wiener–Hopf method in mixed elasticity theory problems / A.A. Khrapkov. – St. Petersburg: B.E. VNIIG Inc., 2001. – 144 p.

2. Дудик М.В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини / М.В. Дудик // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.19, вип. 4 (20). – С. 84-95.

ПРО ВЗАЄМНИЙ ВПЛИВ КОНТАКТУ БЕРЕГІВ І УТВОРЕННЯ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В ПРИВЕРШИННІЙ ОБЛАСТІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Дудик М.В.

Дослідження тріщин, розташованих на межі поділу різних матеріалів, виявили дію багатьох факторів, які суттєво впливають на напружено-деформований стан композитного з'єднання, у тому числі утворення зон передруйнування і деструкції в з'єднаних матеріалах в околі вершин, контакт берегів тріщини з можливим зчепленням у частині контактної зони, прилеглої до вершини, неідеальність міжфазного з'єднання тощо. Математичні труднощі, що виникають при спробі одночасного врахування кількох з вищезгаданих факторів, зумовлюють запровадження спрощених моделей міжфазної тріщини. Зокрема, в [1, 2] досліджено моделі міжфазної тріщини за умов переважаючих зсувних або відривних зовнішніх навантажень, які забезпечують значно менші або значно більші розміри зони передруйнування порівняно з довжиною області контакту берегів. Проте, поза розглядом залишився випадок співрозмірних контактної зони і зони передруйнування.

В даній роботі в умовах плоскої деформації розвинуто модель тріщини на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних крихких матеріалів, яка передбачає існування в околі її вершини області контакту берегів, взаємодіючих за законом сухого тертя, та вузької бічної зони передруйнування у менш тріщиностійкому матеріалі композитного з'єднання. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу. Припускаючи, що розміри зони передруйнування і контактної зони мають однаковий порядок величини і значно менші порівняно з довжиною тріщини, за допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зведена до векторного рівняння Вінера-Хопфа. Розвинуто наближений метод розв'язання векторного рівняння Вінера-Хопфа, який використано для отримання рівнянь для визначення розмірів зони передруйнування і області контакту берегів. Орієнтація зони передруйнування визначалась з умови максимуму потенціальної енергії, накопиченої в зоні. Виконано числові розрахунки вказаних параметрів та аналіз їх залежностей від конфігурації і модуля зовнішнього навантаження. Виявлено істотний взаємний вплив зони передруйнування і контакту берегів тріщини на їх розміри та орієнтацію зони. Зокрема, за наявності зон передруйнування відбувається суттєве збільшення довжини області контакту порівняно з її довжиною при відсутності зони передруйнування. В той же час контакт берегів несуттєво впливає на довжину зони передруйнування, але помітно зменшує кут нахилу зони щодо межі поділу матеріалів і змінює характер його залежності від конфігурації навантаження. Вплив зони передруйнування проявляється також у тому, що з її утворенням довжина області контакту берегів стає залежною від модуля навантаження, тоді як при відсутності зони передруйнування залежність розміру контактної зони від модуля навантаження за сталої конфігурації відсутня.

1. Камінський А. О. Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі / А. О. Камінський, М. В. Дудик, Л. А. Кіпніс // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Т.57, № 4. – С. 95-108.

2. Дудик М. В. Вплив бічної зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини на контакт берегів / М. В. Дудик // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – Т.58, № 1. – С. 143-153.

ТЕПЛОВА НЕСТІЙКІСТЬ НАНОКОМПОЗИТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розроблено метод прогнозування втрати роботоздатності нанокompозитних елементів конструкцій внаслідок теплової нестійкості, який ґрунтується на моделі моногармонічної апроксимації реакції матеріалу на циклічне навантаження, амплітудних співвідношеннях між основними польовими змінними та концепції комплексних модулів. Розвинуто методи оцінки модулів накопичення та втрат складових нанокompозиту, а також модель врахування впливу поверхні контакту волокно–матриця. Розроблено модифіковану процедуру гомогенізації, що ґрунтується на методі Морі-Танака, розвинутому для отримання комплексних модулів нанокompозиту з довільною або однонаправленою орієнтацією нановолокон. Температурно- та амплітудозалежні комплексні модулі використані для вивчення впливу дисипативного розігріву на механічну стійкість полімерного нанокompозитного стержня і, що перебуває під дією як комбінованого статичного і моногармонічного навантаження. Аналогічне дослідження проведено для шарнірно закріпленої балки, виготовленої з нанокompозитного матеріалу, яка перебуває під дією гармонічного в часі рівномірно розподіленого по довжині навантаження. Досліджено вплив амплітуди навантаження та об'ємного вмісту нановолокон на теплову нестійкість полімерних тонкостінних нанокompозитних елементів конструкцій.

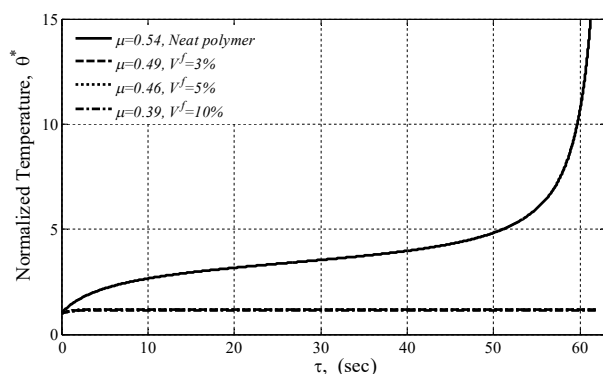


Рис. 1

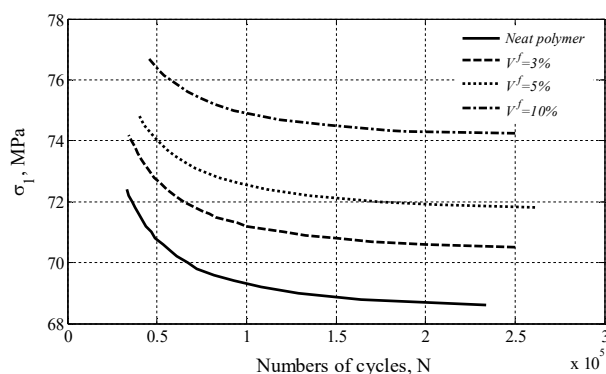


Рис.2

Результати розрахунку еволюції температури в нанокompозитному стержні, армованому однонаправленими CNT волокнами, при амплітуді навантаження $\sigma_I=75$ МПа для різного об'ємного вмісту наповнювача представлена на рис. 1. Типові діаграми σ_I-N (залежності амплітуди навантаження від кількості циклів до руйнування за тепловим критерієм) – аналоги діаграм Велера – для ненаповненого полімерного та полімерних нанокompозитних стержнів, зміцнених довільно орієнтованими CNT волокнами, для частоти зовнішнього збудження 1 Гц та температури навколишнього середовища 25°C показані на рис. 2.

1. Hashemi M. Prediction of thermal instability-initiated performance losses by nanocomposite structure elements under cyclic loading/ M. Hashemi, Y. Zhuk// Strength of Materials. – 2017. – Vol. 49. No 5, – P. 635–651.

2. Hashemi, M. Frequency and amplitude dependence of complex moduli of composite material reinforced with nanofibers/ M. Hashemi, Y.A. Zhuk// Physico-Mathematical Modeling and Informational Technologies. – 2016. – Vol. 23. – P. 92–107.

Жук Олександр Петрович, доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна;

e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: y.zhuk@i.ua

ДІЯ РАДІАЦІЙНОЇ СИЛИ В ЗВУКОВІЙ ХВИЛІ НА СФЕРИЧНУ КРАПЛЮ В ОКОЛІ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Розглядається ідеальна стислива рідина, яка заповнює півпростір. В ній на відстані l від вільної поверхні рідини знаходиться сферична крапля іншої стисливої рідини радіуса R (рис. 1). Зовнішня рідина характеризується густиною ρ і швидкістю звуку в ній a_0 . Рідина краплі має густину ρ_1 і швидкість звуку a_1 . В напрямі, перпендикулярному до межі рідини ($z=0$), поширюється плоска звукова хвиля, потенціал Φ_i якої в системі координат $Oxuz$ (рис.1) має такий вигляд

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1)$$

де A – амплітуда, k – хвильове число, ω – кутова частота.

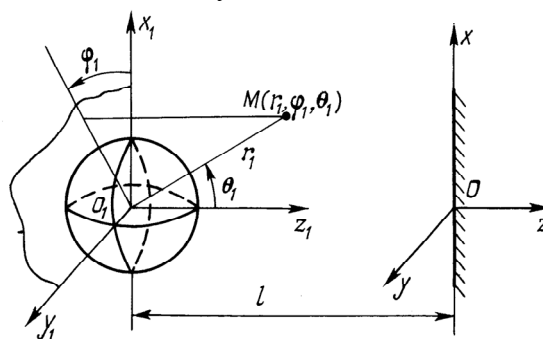


Рис.1

На сферичну краплю, яку вважаємо нерухомою, в звуковому полі діє сила

$$\mathbf{F} = - \int_S p \mathbf{e}_r dS. \quad (2)$$

В (2) p – тиск в рідині, обумовлений звуковою хвилею, S – поверхня сферичної краплі, $\mathbf{e}_r$ – орт нормалі її поверхні. Радіаційна сила є стала складова сили (2), тобто сила, усереднена в часі за період коливальності звукової хвилі [1, 2]. У зв'язку з цим при обчисленні тиску p в звуковому полі, необхідно враховувати величини, квадратичні по змінних цього поля, які не перетворюються в нуль при усередненні в часі. Для визначення потенціалу Φ звукового поля, враховуючи і динамічний процес в краплі, необхідно розв'язати задачу дифракції хвилі з потенціалом Φ_i на сферичній краплі; хвилі, відбитої від вільної поверхні рідини і хвилі, розсіяної від краплі. Як відомо [1, 2], при цьому можна обмежитись розв'язком лінійної задачі дифракції. Вільну поверхню рідини можемо вважати ідеальною [3] і для визначення потенціалу відбитої від вільної поверхні рідини хвилі скористатися методом уявних зображень, а потенціал Φ інтерференції всіх звукових хвиль подати сумою узагальнених рядів по сферичних хвильових функціях, застосувавши до них теореми додавання.

1. King L.V. On the acoustic radiation pressure on sphere//Proc. Roy. Soc. Ser.A.-1934.-147, N 861. – P.212 – 240.

2. Гузь А.Н., Жук А.П., Багно А.М. Динамика упругих тел, твердых и жидких частиц в сжимаемой вязкой жидкости (обзор) // Прикл. механика. – 2016.– 52, № 5. – С. 3– 77.

3. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 496 с.

ПЛОСКА МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ ПІД ВПЛИВОМ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Журавльова З.Ю.

Розглядається пружна півсмуга, що займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$. На бічних гранях півсмуги виконуються умови зчеплення $u(0, y, t) = 0, v(0, y, t) = 0, u(a, y, t) = 0, v(a, y, t) = 0$. По короткому торцю півсмуги $y = 0, 0 < x < a$ задано напруження $\sigma_y|_{y=0} = -p(x, t), \tau_{yx}|_{y=0} = 0$.

Потрібно визначити хвильове поле півсмуги, а також отримати вирази для функцій переміщень та напружень, що задовольняють крайовим умовам та рівнянням руху

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\rho}{G} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Тут $u(x, y, t) = u_x(x, y, t), v(x, y, t) = u_y(x, y, t)$, $\kappa = 3 - 4\mu$ - стала Мусхелішвілі, μ - коефіцієнт Пуассона.

Вихідна задача зводиться до одновимірної крайової задачі за допомогою застосування перетворення Лапласа за змінною t та півнескінченного $\sin$ - $\cos$ перетворення Фур'є за змінною y . Отримана у просторі трансформант задача формулюється у вигляді векторної крайової задачі, розв'язок якої побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення [1] та матриці-функції Гріна [2]. Розв'язок векторної крайової задачі приймає наступний вигляд

$$\vec{y}_{s\beta}(x) = (Y_1(x) + Y_3(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(x) + Y_4(x)) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G_s(x, \xi) \vec{f}_s(\xi) d\xi, \quad (2)$$

де $Y_i(x), i = \overline{1, 4}$ - фундаментальні розв'язки відповідного матричного однорідного рівняння, $c_i, i = \overline{1, 4}$ - сталі, що знаходяться із задоволення крайових умов на бічних гранях півсмуги, $G_s(x, \xi)$ - матриця-функція Гріна.

Вираз (2) містить невідому функцію $\chi(\xi) = v|_{y=0}$, для знаходження якої використовується умова $\sigma_y|_{y=0} = -p(x, t)$. Розв'язок задачі знайдено для випадку стаціонарних коливань, встановлено поле переміщень та напружень усередині півсмуги.

1. Vaysfel'd N. On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / N. Vaysfel'd, Z. Zhuravlova // Acta Mechanica. Vol. 226, № 12. – 2015. – P. 4159-4172.

2. Попов Г.Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г.Я. Попов, С.А. Абдыманов, В.В. Ефимов. – Алматы: Изд. Рацах, 1999. – 133 с.

Зражевський Григорій Михайлович, канд. фіз.-матем. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
zgrig@univ.kiev.ua ;
Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-матем. наук, доцент,
Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна.

ВИКОРИСТАННЯ ФОРМАЛІЗМУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДЕФЕКТІВ ТОЧКОВИМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

В численних задачах теорії пружності використовуються моделі дефектів, в основі яких лежать властивості сингулярних розв'язків граничних задач. Класичними прикладами є використання пружних потенціалів в теорії пружності та тензор сейсмічного моменту в динамічній теорії пружності. В наш час активно розвивається напрямок стохастичної механіки основною ідеєю якої є побудова механічних моделей при неповноті (не детермінованості) фізичних характеристик та коефіцієнтів стану. До задач такого типу належать, зокрема задачі механіки тріщин з фрактальною траєкторією, задачі теорії міцності з стохастичною дефектністю, тощо. В таких задачах, особливе значення мають моделі з нерегулярними характеристиками, що можуть бути змодельовані точковими сингулярностями з не детермінованими характеристиками. Такі математичні моделі дефектів повинні бути коректними з механічної точки зору, зокрема, бути енергетично замкненими, не вступати в протиріччя з основними гіпотезами механіки, мати механічне трактування. Побудова моделей скінченних неоднорідностей для тривимірних об'єктів є предметом численних досліджень (наприклад, скінченне жорстке чи пружне включення, тріщина в пружному тілі) та може бути зведена до граничних задач чи задач спряження. При цьому граничний перехід до точкових дефектів може призвести до багато параметричних асимптотичних розкладів, що демонструють фізичні некоректності, розв'язання яких передбачає використання додаткових механічних обмежень. В якості прикладу можна згадати нульовий опір для веретеноподібного жорсткого включення з нульовою кривизною кінця, екстремальне поширення крихкої тріщини, тощо. Подібні проблеми виникають при побудові точкових дефектів в задачах основна модель об'єкта якого передбачає накладання додаткових гіпотез при зменшенні розмірності (наприклад, стрижнева модель, балки та плитівки Кіргхофа). Для таких задач проблемним є не лише граничний перехід до точкових дефектів (тобто - до багатовидів нульової розмірності) та забезпечення енергетичної замкненості, а також, механічне трактування характеристик моделей.

У даній роботі досліджується підхід до побудови моделей точкових дефектів, що базується на розв'язанні граничних задач з негладкими коефіцієнтами. Отже, неоднорідність включається в визначальне рівняння граничної (чи початково-граничної) задачі. Такий підхід дозволяє формалізувати дефекти на етапі використання рівнянь стану, а отже автоматично узгоджує дефект з гіпотезами пониження розмірності та не порушує енергетичної замкненості. Розв'язок розшукується у вигляді слабо збіжних рядів по узагальненим функціям (лінійним функціоналам). Аналіз таких рядів дозволяє вибудовувати розв'язки, що асимптотично збігаються та мають фізичний зміст. Такий підхід також спрощує механічну інтерпретацію параметрів дефектів.

Запропонований підхід демонструється на прикладах:

- точкового дефекту в задачі одновимірної хвильової динаміки при фрагментуванні та руйнуванні скінченного стрижня під дією пружної хвилі. В цьому випадку показано, що побудований дефект може при різних інтерпретаціях описувати як просте фрагментування, руйнування шляхов розтріскування, руйнування в результаті розвинення точкової пластичної деформації;

- точкового дефекту в пружній балці Кіргхофа, що гармонійно коливається. Така модель описує граничний стан пружного включення з ослабленням чи зі зміцненням.

Зражевський Григорій Михайлович, канд. фіз.-матем. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
zgrig@univ.kiev.ua ;
Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-матем. наук, доцент,
Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна.

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЗБУДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ

Розрахунок збудження хвильових рухів в одно та двовимірних механічних об'єктах є важливою задачею адаптивної оптики. Важливою є можливість збудження суперпозиції наборів стоячих та біжучих хвиль, що дозволяє сформувати бажану залежність профілю відбиття в просторі та часі. Розв'язання прямої задачі збудження таких об'єктів силами з заданими характеристиками є предметом розгляду в чисельних наукових та науково-інженерних працях. В той же час, постає задача визначення силових характеристик збудження, що забезпечують найкраще наближення бажаного хвильового профілю в заданому частотному діапазоні. Ця задача може бути формалізована у вигляді задачі умовної мінімізації квадратичного функціоналу нев'язки відхилення фактичного профілю від заданого при заданих обмеженнях на керуючі змінні. Математичні особливості такої задачі обумовлюються не опуклістю (багато екстремальністю) та багато вимірністю цільової функції, що потребує математичних досліджень існування та особливостей побудови оптимального розв'язку. З точки зору теорії апроксимації, задача полягає в знаходженні оптимального наближення заданої комплексно значної функції, скінченною лінійною комбінацією повної (але не ортогональної) системи функцій, що є розв'язками граничних задач.

Як приклад задач такого виду, у пропонованій роботі розглянута модельна задача про гармонійні коливання шарнірно закріпленої пластини, що знаходиться під впливом деякого числа точкових зосереджених сил. Вважається, що модель пластини задовольняє умовам Кірхгофа. При заданих характеристиках силового збудження (кількості сил, координат їхнього прикладання, амплітуд та фаз), задача визначення коливань може бути розв'язана у вигляді суперпозиції функцій Гріна. Функція Гріна побудована стандартним чином у вигляді ряду Фур'є по коловій координаті. Функція Гріна з центральною силою побудована шляхом граничного спрямування радіальної координати точки прикладання сили до нуля. Це дозволило, шляхом використання рівності Парсеваля (в просторі L_2) побудувати цільову функцію у вигляді комбінації лінійної та ермітової форм відносно комплексних амплітуд сил, матриці яких нелінійним (та не опуклим чином) залежать від координат точок сингулярності. Особливість даної задачі полягає в тому, що повний (експоненційний) ряд Фур'є має не комплексно спряжені коефіцієнти. Окрім того, матриця ермітової форми є виродженою. В отриманій задачі керуючими змінними є комплексні амплітуди сил та координати точок прикладання нецентральної сил. Проте, розмірність простору коливання може бути редуковано шляхом аналітичного визначення амплітуд сил в силу квадратичної вигляду ермітової форми з виродженою матрицею. Показано яким чином можна суттєво спростити (в редукованому просторі) підрахунок градієнтів по кутовим та радіальним координатам функціоналу. Розглянуто частинний випадок групування сил збудження, на концентричних колах. Результати роботи дозволяють суттєво зменшити вимоги до ресурсів при чисельній реалізації.

Таким чином, проведено повне математичне дослідження поставленої задачі. Основні результати представлені у вигляді тверджень, лем та теорем. Результати продемонстровані розрахунковим чисельним прикладом з використанням багатофункціонального пакету PSG (Matlab Interface), наданим American Optimal Decision, USA.

ПРО ДЕЯКІ СПОСОБИ ДОСЯГНЕННЯ ВІДСУТНОСТІ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ЗА ТОВЩИНОЮ БЕЗМЕЖНОМУ ШАРІ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Калиняк Б.М.

В останні роки все більшого поширення набуває використання функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ). ФГМ – це неоднорідні матеріали, що характеризуються технологічно контрольованою неперервною зміною своїх властивостей від просторових координат за рахунок зміни об'ємної частки їх складових.

Щоб отримати умови відсутності напружень у нескінченній плиті використано відомі вирази для поздовжніх напружень, які відповідають плоскому деформованому стану або рівності нулю середнього зусилля в перерізі. При відсутності навантажень по товщині плити та масових сил поперечні напруження відсутні. Якщо у цих виразах покласти напруження рівними нулю, то отримаємо відповідно інтегральні однорідні рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром, яке має власні значення відносно деформацій $\Phi(x)$, викликаних зовнішнім полем.

Відповідні розв'язки цих рівнянь, отримані відомими методами мають вигляд:

$$\Phi(x) = D_1 x + D_2, \quad (1)$$

$$\Phi(x) = D, \quad (2)$$

де D , D_1 , D_2 – довільні сталі. Розв'язок (1) відповідає заданим зусиллям та моментам у поперечному перерізі плити, а розв'язок (2) – плоскому деформованому стану.

У випадку стаціонарного температурного поля $\Phi(x) = \alpha(x)T(x)$, де $\alpha(x)$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення. З цього зв'язку визначено температурне поле $T(x)$ через коефіцієнт лінійного температурного розширення, яке повинно задовольняти відповідну стаціонарну задачу теплопровідності з теплофізичними характеристиками, залежними від поперечної координати x . Відповідна задача теплопровідності накладає зв'язки на умови теплообміну та термомеханічні характеристики матеріалів. У випадку плоского деформованого стану і припущення, що характеристики двокомпонентного матеріалу описуються моделлю простої суміші концентрація одного складника матеріалу в іншому при заданих умовах теплообміну виражається через W -функцію Лямберта.

Отримано аналітичні вирази для умов, які пов'язують термомеханічні характеристики матеріалів і температурні поля, та забезпечують відсутність напружень. Записані умови теплообміну, якщо відомий розподіл характеристик матеріалу, і розподіл характеристик матеріалу, якщо відомі умови теплообміну, які забезпечують відсутність напружень у плиті. Проведені числові розрахунки для існуючих неоднорідних металокерамічних матеріалів для випадку конвективного теплообміну вказують на можливість досягнення стану відсутності напружень у неоднорідних матеріалах при стаціонарному теплообміні.

Карнаухов Василий Гаврилович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев, Украина;
e-mail: karn@inmech.kiev.ua
Козлов Владимир Ильич, доктор физ.-мат. наук,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев, Украина;
e-mail: karn@inmech.kiev.ua
Карнаухова Татьяна Васильевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Национальный технический университет «КПИ», Киев, Украина
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

КРИТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА НА ШАРНИРНО ОПЕРТУЮ ТРЕХСЛОЙНУЮ ВЯЗКОУПРУГУЮ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЬЕЗОПЛАСТИНУ

Существуют различные критерии потери несущей способности тонкостенных элементов конструкций при механическом и температурном нагружении: статическая и динамическая потеря устойчивости, развитие недопустимого уровня деформаций и др. Для конструктивных элементов с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом электромеханическом нагружении потеря несущей способности может быть вызвана достижением температурой диссипативного разогрева точки Кюри. Нагрузку, при которой температура достигает точки Кюри, назовем критической.

В данной работе получено аналитическое решение задачи о колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой трехслойной прямоугольной пластины с внутренним пассивным и двумя внешними пьезоактивными слоями с противоположной поляризацией, на которые нанесены электроды. К электродам подводится изменяющаяся по гармоническому закону разность потенциалов, вызывающая изгибные колебания пьезопластины. Находится диссипативная функция и температура, зависящая от амплитуды электрической нагрузки. Как известно [1], при достижении температурой точки Кюри пьезоэлемент перестает выполнять свое функциональное назначение из-за потери им пьезоэффекта. При этом вызвать колебания пластины путем подвода к электродам гармонической разности потенциалов становится невозможным. Поэтому в качестве критерия потери функционального назначения указанной пластины выбрано достижение температурой диссипативного разогрева точки Кюри. Аналитическое выражение для критической нагрузки находится приравниванием температуры диссипативного разогрева точке Кюри. Оно позволяет исследовать влияние различных факторов на работоспособность пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов.

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.4).

Карнаухов Василий Гаврилович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев, Украина,
e-mail: karn@inmech.kiev.ua;
Козлов Владимир Ильич, доктор физ.-мат. наук,
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев, Украина,
e-mail: karn@inmech.kiev.ua;
Карнаухова Татьяна Васильевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Национальный технический университет «КПИ», Киев, Украина,
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Вынужденным колебаниям тонкостенных элементов из пассивных (без пьезоэффекта) и активных (с пьезоэффектом) материалов посвящено большое количество публикаций отечественных и зарубежных ученых – механиков. Опубликовано ряд работ по исследованию вынужденных колебаний тонкостенных элементов с учетом влияния на них диссипативного разогрева. Однако отсутствуют работы по исследованию параметрических колебаний с учетом связанности электромеханических и температурных полей, в частности, с учетом диссипативного разогрева, вызванного гистерезисными потерями в неупругом материале. Между тем, при некотором значении амплитуды гармонической нагрузки температура диссипативного разогрева может достичь точки деградации материала, при которой активный материал теряет пьезоэффект и становится пассивным. При этом вызвать параметрические колебания в элементе из такого материала путем подвода к нему изменяющейся по гармоническому закону разности потенциалов становится невозможным. Такую нагрузку назовем критической.

В данной работе исследуются параметрические колебания трехслойной прямоугольной пластины с внутренним пассивным слоем и двумя внешними пьезоактивными слоями одинаковой толщины и с одинаковой поляризацией. Пьезоэлектрические слои ограничены электродами, к которым подводится изменяющаяся по гармоническому закону разность потенциалов. Учитываются потери в материале и диссипативный разогрев. Для шарнирного опирания торцов пластины решение задачи сводится к классическому уравнению Матье с учетом затухания, которое достаточно хорошо изучено в литературе. Построены первые три области неустойчивости и найдены минимальные критические усилия для этих областей.

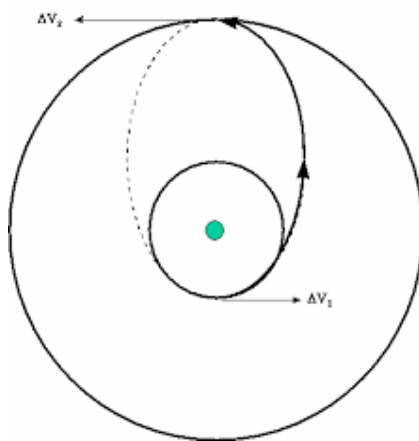
Исследовано влияние температуры диссипативного разогрева на параметрические колебания. Приравниванием максимальной температуры диссипативного разогрева точке Кюри найдено критическое значение разности потенциалов, при превышении которого возбудить параметрические колебания невозможно из-за потери материалом пьезоэффекта.

Kharytonov Oleksiy, Ph.D (Phys.-Math.), associate professor,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
 e-mail: kharytonov@univ.kiev.ua
 Savchenko Serhii, student,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
 e-mail: serg.savchenko1999@gmail.com
 Nicolas Miranda, Erasmus student,
 Ecole Central Lyon, France,
 E-mail: nicolas.miranda@ec117.ec-lyon.fr

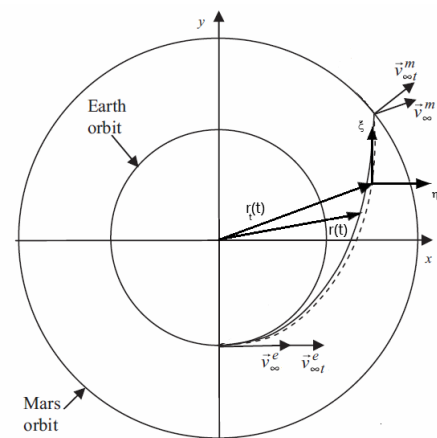
OPTIMIZATION OF SPACE MANEUVERS USING HIGH AND LOW THRUST WITH A NUCLEAR ENGINE

Kharytonov O., Savchenko S., Miranda N.

Interplanetary missions require fast and fuel efficient transfer. Small time transfers need a large amount of fuel, saving a part of this fuel from high thrust to low thrust propulsion can increase the final payload mass, due to the higher efficiency for low thrust. We have investigated the optimal way to take advantages to both benefit of high and low-thrust propulsion in order to maximize the payload mass of the mission. Using a simple model of ideal engine of limited power and the transporting trajectory method, we determined the analytical expression of final payload mass. The solution of the optimization problem gave us the optimal repartition of fuel between high and low-thrust maneuvers for a given thrust of thermal propulsion and electrical power of ionic propulsion system.



Hohman transfer



Sprint transfer

As the mass of the low-thrust propulsion system depends on the electrical power, we took it into account to determine the optimal electrical power for a sprint trajectory in a given time. As a result, we could obtain the interval of transfer time for which the combination for high and low-thrust becomes optimal.

Клімчук Тарас Володимирович, кандидат фізико-математичних наук
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 e-mail: tarasyniv@ukr.net
 Острик Володимир Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 e-mail: v.i.ostryk@gmail.com

КОВЗНИЙ КОНТАКТ ПРУЖНОЇ СМУГИ ТА ПАРАБОЛІЧНОГО ШТАМПА

Клімчук Т. В., Острик В. І.

Розглядається контактна взаємодія між пружною смугою $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ та параболічним штампом із врахуванням сил тертя в області контакту $0 \leq x \leq l$, $y = h$. До штампа прикладена стискальна вертикальна сила P та зсувна горизонтальна сила $\mu_0 P$, де μ_0 – коефіцієнт тертя між верхньою межею смуги та підшовою штампа. У такому разі має місце повне проковзування вздовж усієї області контакту штампа і смуги, де нормальні та дотичні напруження зв'язані законом тертя Амонтона (Кулона). Частина верхньої межі смуги $-\infty < x < 0$, $l < x < \infty$, $y = h$ поза областю контакту вільна від навантаження. Нижня межа смуги $-\infty < x < \infty$, $y = -h$ жорстко закріплена.

Мішані крайові умови задачі наступні:

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= f(x) - \delta, \quad 0 \leq x \leq l, \quad f(x) = \frac{1}{2R}(x - l_1)^2, \\ \tau_{xy}|_{y=h} &= -\mu_0 \sigma_y|_{y=h}, \quad 0 < x < l, \\ \sigma_y|_{y=h} &= 0, \quad \tau_{xy}|_{y=h} = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad l < x < \infty, \\ u_x|_{y=-h} &= 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

де $y = f(x)$ – рівняння підшови штампа, R – радіус кривизни контуру штампа у його вершині $x = l_1$, δ – осадка смуги під вершиною штампа. Величини l , l_1 , δ заздалегідь невідомі.

Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є до рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов (1) задачу зведено до інтегрального рівняння вигляду

$$\int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = \sqrt{2\pi} \left[1 - \delta^{-1} f(2h\xi) \right], \quad 0 < \xi < a, \quad a = \frac{l}{2h}, \quad (2)$$

де $k(\xi - \eta)$ – відома функція, а $\varphi(\eta)$ – невідома функція контактних напружень.

Методом Вінера – Гопфа [1] інтегральне рівняння (2) зведено спочатку до системи функціональних рівнянь, а потім – до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язок останньої знайдено у вигляді ряду за степенями малого параметра $\lambda = e^{-\pi a/2}$.

Знайдено розподіли контактних напружень, нормальних і дотичних напружень на закріпленій грані смуги, нормальні переміщення точок вільної від навантаження частини межі смуги. Побудовано лінії рівня максимальних дотичних напружень та встановлено положення точки з їх найбільшим значенням залежно від параметра відносної кривизни штампа у його вершині та коефіцієнта тертя.

1. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.

ВТОМНА ДОВГОВІЧНІСТЬ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ СТРИЖНІВ ПРИ ОДНОВІСНОМУ СИМЕТРИЧНОМУ РОЗТЯГУ-СТИСКУ

Кобзар Ю.М.

Побудовано модель багато циклової втоми стрижня під дією м'якого симетричного навантаження в вигляді розтягу-стиску, коли початкові амплітудні напруження не перевищують межі пропорційності. Досліджується крихке руйнування матеріалів, в процесі якого відбуваються зміни несучого об'єму зразка та незначні зміни форми, які не враховуються. Структурні зміни відбуваються в кожному циклі, їх чинниками є зміни – маси, щільності, напружень, модуля пружності, пружної потенційної енергії одиниці об'єму, які і призводять до руйнування при втомі.

Для довільного i -го циклу, в його першому пів циклі, за умов стиску, прийнято, що щільність $\rho_2(i-1)$ незмінна та доведено, що маса $m_1(i)$ знаходиться з квадратного рівняння

$$E_2(i-1) \left(\frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right)^2 - (E_2(i-1) + \sigma_{xa2}(i-1)) \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} + 2(1-\mu)\sigma_{xa2}(i-1) = 0. \quad (1)$$

Початкове напруження для наступного пів циклу, цього ж циклу, при масі $m_1(i)$ буде

$$\sigma_{xa1}(i) = \left(\frac{m_1(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1). \quad (2)$$

При постійному коефіцієнті Пуасона – μ , потенційна енергія, що періодично напompовується силою P_a в стрижень рівна потенційній енергії одиниці об'єму помноженій на його об'єм. З цієї рівності енергій знаходиться новий модуль пружності

$$E_1(i) = \frac{\sigma_{xa1}^2(i)(m_1(i))^2 \omega^2}{P_a^2 \rho_2(i-1)} \quad (3)$$

стрижня, який використовується в наступному пів циклі. В цьому ж i -тому циклі в другому пів циклі вже при розтягу прийнято, що маса $m_1(i)$ залишається незмінною, тоді як щільність $\rho_2(i)$, як доведено, визначається з рівняння

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{xa1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0. \quad (4)$$

Напруження для першого пів циклу наступного циклу, при знайденій щільності $\rho_2(i)$ буде

$$\sigma_{xa2}(i) = \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i). \quad (5)$$

Критерієм втомного руйнування стержня прийнято, досягнення енергією на якомусь пів циклі, критичного значення, яке визначається межею міцності та модулем пружності. Розрахунки припиняються при досягненні циклу, на якому виконуються умови критерію руйнування або перевищується умовна база випробовувань без руйнувань, тобто стає досяжною межа втоми. Подібний підхід розв'язку такої задачі був запропонований раніше, але без визначення модуля пружності на кожному циклі [1].

1. Кобзарь Ю.М. К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии / Ю.М Кобзарь // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – №9 (126). – С. 6-14.

КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ» З ВИКОРИСТАННЯМ ПРИНЦИПУ НАЙМЕНШОГО ПРИМУСУ ГАУССА

Константинов О.В.

Інженерні конструкції, які містять в своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, широко використовуються в різних областях техніки [1]. Баки з рідиною є невід'ємною частиною космічних апаратів з рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів та інших транспортних засобів. Резервуари постійно використовуються для перевезень та зберігання рідинних вантажів на відповідних етапах виробничих або технологічних процесів. У всіх наведених прикладах предметом теоретичного та експериментального дослідження є поведінка конструкцій з рідиною в умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних та керуючих навантажень з урахуванням наявності постійно діючого збурення – коливань вільної поверхні рідини.

Однією із важливих задач при практичному використанні резервуарів є забезпечення їхнього руху за заданою програмою при найменших силових (енергетичних) витратах. Така задача може бути розв'язана, в тому числі, на основі диференціального варіаційного принципу Гаусса – принципу найменшого примусу [2]. Було поставлено задачу розробки керування, яке забезпечить резервуару з рідиною набір заданої швидкості за визначений час, а в подальшому – рівномірний рух. Побудова керування з використанням принципу найменшого примусу Гаусса проводилася на основі спрощеної моделі з двома ступенями вільності. Це дозволило отримати функцію керування в аналітичному вигляді для різних програмних законів (в тому числі, і нелінійних) руху резервуару та вільною поверхні рідини. Зокрема, аналітичний вираз для керування отримано для випадків, коли 1) коливання вільної поверхні рідини взагалі не враховуються; 2) амплітуда коливань вільної поверхні рідини змінюється за заданим у часі законом; 3) амплітуда коливань вільної поверхні рідини змінюється довільно у заданому інтервалі (визначена за допомогою нерівності).

Дослідження динаміки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією обчисленого керування проводилася на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [1]. Резервуар циліндричної форми вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Дослідження динаміки системи проводилася на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах всіх форм.

Керування, побудоване на основі лінійної моделі для реалізації лінійних програмних законів руху, може бути використано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень необхідно введення нелінійних програмних законів руху для отримання і використання нелінійного закону керування.

3. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.

4. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

Козлов Владимир Ильич, доктор физ.-мат. наук,
 Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев, Украина,
 Шевченко Александр Юрьевич, кандидат физ.-мат. наук
 Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, Киев, Украина,
 e-mail: shevalie@ua.fm

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СЛОИСТЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Козлов В.И., Шевченко А.Ю.

Исследование распространения нестационарных возмущений в слоистых упругих и вязкоупругих средах представляет значительный научный и практический интерес. Значительные достижения в этом направлении получены в результате сочетания метода конечных элементов, позволяющего рассматривать тела сложной геометрической формы и учитывать неоднородность материала, с различными аналитическими и численными методами, применяемыми для решения обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций времени.

В данном сообщении рассматривается задача о динамическом поведении слоистого трехмерного тела вращения из вязкоупругого материала при деформации, вызванной механической нагрузкой. При этом нагрузка может быть функцией координат и времени.

Для решения рассматриваемой задачи используется вариационная формулировка. Вариационная задача механики решается методом конечных элементов с использованием изопараметрических шестигранных элементов с квадратичной аппроксимацией компонент вектора перемещений в пределах элемента.

Из условий стационарности функционала, для определения компонент вектора перемещений в узловых точках элемента получена система интегро-дифференциальных уравнений

$$M \frac{d^2 U}{dt^2} + R * U + KU = P \quad (1)$$

Для решения системы уравнений (1) используется метод разложения компонент вектора перемещений по собственным формам колебаний (метод суперпозиции гармоник). Это позволяет свести задачу к решению интегро-дифференциального уравнения относительно функции времени $f(t)$

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + R * \frac{d f_n}{dt} + \omega_n^2 f_n = Q_0 q_n(t) \quad (2)$$

Для широкого класса вязкоупругих материалов одним из эффективных методов решения интегро-дифференциального уравнения (2) является метод усреднения Крылова-Боголюбова, что позволяет получить аналитическое решение рассматриваемой задачи. Используя для описания вязкоупругих свойств материала дробно-экспоненциальное ядро А.Р. Ржаницина $R = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ и применяя метод усреднения Крылова-Боголюбова для случая, когда $q(t) = H(t)$ (H – единичная функция Хевисайда), решение можно записать в виде суммы квазистатической и динамической составляющих:

$$U = U_{st} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{\omega_n^2} W_n e^{-\alpha_{1n} t} \left[\cos(\omega_n - \alpha_{2n}) t + \frac{\alpha_{2n}}{\omega_n - \alpha_{2n}} \sin(\omega_n - \alpha_{2n}) t \right],$$

$$\alpha_{1n} = \frac{A \Gamma(\alpha) \omega_n}{2(\beta^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}} \sin\left(\alpha \arctg \frac{\omega_n}{\beta}\right), \alpha_{2n} = \frac{A \Gamma(\alpha) \omega_n}{2(\beta^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}} \cos\left(\alpha \arctg \frac{\omega_n}{\beta}\right), \Gamma(\alpha) \quad \text{-гамма-функция}$$

Исследовано динамическое поведение двухслойного вязкоупругого цилиндра при действии на внутренней поверхности внезапно приложенного кусочно-постоянного давления.

ХВИЛІ НА ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ РІДИНИ В «СПІВУЧОМУ БОКАЛІ»

Краснопольська Т.С.

В роботі розглядається поява вимушених і хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини в «співаючих бокалах» на основі використання метода суперпозиції при аналітичному розв'язку задачі. Вимушені хвилі у циліндричних бокалах створюють осесиметричну картину і коливаються як концентричні кола. Хрестоподібні хвилі мають гребені, перпендикулярні до вібруючої стінки хвилепродуктору, тобто, до «співаючого бокалу», керованому рухомим пальцем. Згідно з експериментальними дослідженнями вимушені хвилі мають чотири вузли в азимутальному напрямку. Для вимушених хвиль виводиться лінійна модель, а для хрестоподібних хвиль розробляються нелінійні параметричні моделі. Графічне представлення вільної поверхні за допомогою декількох власних форм показує основні риси хвильових структур у співочих бокалах.

Щоб проаналізувати хвилі на вільній поверхні рідини в «співаючому бокалі», робиться припущення щодо геометрії задачі: контейнер у формі чаші замінюється циліндром з круглим поперечним перерізом (радіусу R) і плоским горизонтальним дном. Хоча ця основна геометрія є осесиметричною, стінка циліндра має коливання по другій моді в окружному напрямку, тобто по $\cos 2\theta$ - залежністю від азимутальної координати θ . Рух рідини зручно описувати в циліндричній системі координат (r, θ, x) , при цьому вісь x направляється уздовж осі симетрії контейнера. Рідина має середню глибину d ; середнє положення вільної поверхні приймається за $x = 0$, так що положення дна резервуара задається $x = -d$. Стінка циліндра гармонійно вібрує з частотою ω таким чином, що її радіус змінюється, як $R^1 = R + \chi(x, \theta, r)$, де $\chi = a \cos 2\theta \cos(\pi x / d) \cos \omega t$ і описує коливання стінок циліндра. Припускаючи, що рідина є нев'язкою і нестисливою, поле швидкості представлялося в термінах потенціалу швидкості.

Незважаючи на те, що хрестоподібні хвилі були описані ще Фарадеєм (1831), теоретичне обґрунтування можливості їх збудження в «співочому бокалі» було отримано нещодавно [1], де поява таких хвиль має характер резонансних коливань. Побудовано дві математичні моделі. Перша теоретична модель описує появу хрестоподібних хвиль, коли на поверхні вільної рідини спостерігається лише одна власна мода, а друга модель застосовується у випадку, коли присутні щонайменше дві або три власні моди. Графічні представлення вільної поверхні з трьома власними модовими апроксимаціями відображають основні особливості хвильових структур, які експериментально спостерігаються в «співочому бокалі». Для резонансного режиму в першій моделі отримано лише одне рівняння, а у другій - систему з трьох рівнянь. Очевидна відмінність моделей полягає в різних частотах поверхневих коливань: у першому випадку частота вдвічі перевищує частоту поверхневих коливань циліндричного бокалу. Крім того, амплітуда коливань у першій моделі є на порядок менше, ніж у другому. Друга модель однак передбачає одночасне збудження принаймні двох резонансних форм. Яка з двох розроблених моделей застосовується до реалістичного випадку може бути визначено експериментально шляхом вимірювання частот коливань циліндра і порівнюючи їх з власними частотами спостережуваних хрестоподібних хвиль.

1. Krasnopolskaya T.S. Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass' / T.S. Krasnopolskaya. G.J.F. van Heijst // The European Journal of Mechanics B/Fluids (EJMBF), 2018, 67, January, N1, P. 116-124.

Кривий Олександр Федорович, доктор фіз.-мат. наук, професор

Одеська національна морська академія, Одеса, Україна

e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

Морозов Юрій Олександрович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний політехнічний університет, Одеса, Україна

e-mail: morozovyu@gmail.com

КРУГОВЕ ТЕПЛОАКТИВНЕ МІЖФАЗНЕ ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ

Кривий О.Ф., Морозов Ю.О.

Побудовано точний розв'язок задачі термопружності про міжфазне кругове включення, яке знаходиться в умовах повного зчеплення з різними трансверсально-ізотропними півпросторами. Одержані залежності поступальних і кругових зміщень включень від рівнодійних навантажень, головних моментів та термопружних властивостей півпросторів. Розглянуто задачу стаціонарної термопружності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору. В площині $x_3 = 0$ з'єднання двох трансверсально-ізотропних півпросторів є абсолютно жорстке включення, яке займає область $\Omega: \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. До включення прикладене довільне навантаження, що зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і утворює головний момент $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Розташування граней включення після деформації описується функціями

$$\begin{aligned}\zeta_6^\pm &= \zeta_6^0 + \vartheta_0^\pm(x_1, x_2), \quad \zeta_k^\pm = \zeta_k^0, \quad k = 4, 5, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \\ \zeta_4^0 &= \delta_1 - \varphi_3 x_3, \quad \zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_3 x_1, \quad \zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_2 x_2 + \varphi_1 x_2, \\ \{\zeta_k^\pm\}_{k=1}^8 &= \{\sigma_3(\mathbf{x}), \sigma_4(\mathbf{x}), \sigma_5(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\}_{|_{x_3=\pm 0}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_k\}_{k=1}^6 = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}, \quad \mathbf{u} = \{u_k\}_{k=1}^3 = \{u, v, w\}\end{aligned}$$

Розглянуто випадок, коли на включенні задано тепловий потік та включення повністю зчеплено з півпросторами, у цьому випадку граничні умови мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned}\chi_4^\pm(x_1, x_2) &= (1 \pm 1)\zeta_4^0, \quad \chi_5^\pm(x_1, x_2) = (1 \pm 1)\zeta_5^0, \quad \chi_6^\pm(x_1, x_2) = \vartheta^\pm(x_1, x_2) + (1 \pm 1)\zeta_6^0, \\ \vartheta^\pm &= \vartheta_0^\pm \pm \vartheta_0^-, \quad \zeta_8^\pm(x_1, x_2, \pm 0) = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \\ \chi_k^-(x_1, x_2) &= 0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad \zeta_7^-(x_1, x_2, +0) = \zeta_7^-(x_1, x_2, -0) \\ \lambda_3^+ \partial_2 \zeta_7(x_1, x_2, +0) &= \lambda_3^- \partial_2 \zeta_7(x_1, x_2, -0), \quad (x_1, x_2) \notin \Omega,\end{aligned}$$

реалізуючи які відносно невідомих стрибків напруження та температури отримано систему двомірних інтегральних рівнянь (ДСР). Застосувавши до розв'язку системи підхід, який було застосовано у роботі [2], отримано явні вирази для стрибків напружень та температури на включенні. Зокрема, для стрибка нормальних напружень ми маємо:

$$\langle \sigma_z \rangle^- = v_1^-(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\pi \rho^2} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{t \eta_{10}^-(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{i\varphi} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{11}^-(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right],$$

1. Kryvyi O. The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium / O. Kryvyi // Operator Theory: Advances and Applications. — 2009. — Vol.191. — pp. 387-398.

2. Kryviy O.F Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space / O.F. Kryviy // Mathematical Sciences — 2012.- Vol.184(1), pp.101-119.

Кундрат Микола Михайлович, доктор техн. наук, професор,
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна;
 e-mail: kundrat@i.ua
 Кундрат Андрій Миколайович, к.ф.-м.н., доцент,
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна;
 e-mail: riyl@ua.fm
 Заблотська Юля Володимирівна,
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна;
 e-mail: melnytschka@ukr.net

ВІДШАРУВАННЯ ГНУЧКОГО НЕРОЗТЯГЛИВОГО ПІДСИЛЕННЯ ВІЛЬНОГО КРАЮ ПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНИ

Кундрат М.М., Кундрат А.М., Заблотська Ю.В.

Задача розрахунку підсилюючих елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій залишається на часі. Підкріплюючі елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень і спричиняють нелінійні та пластичні деформації чи розвиток зон розпушення, що в значній мірі ускладнює прогноз граничної рівноваги системи в цілому.

В умовах плоскої задачі теорії термопружності розглядаємо півбезмежну пластину, що розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності $\sigma_{xx}^{\infty} = q$ паралельно до її краю. Пластина підкріплена гнучким нагрітим до температури T_1 підсиленням завдовжки $2a$. Тепловий контакт між підсиленням та пластиною ідеальний, а температура вільного краю пластини дорівнює T_0 . Приймаємо, що енергія відшарування підсилення на одиницю довжини є величиною сталою та відомою і знайдемо аналітичні залежності зміни робочої довжини підсилення a_{wr} від силового та температурного навантажень, міцнісних та пружних характеристик композиції.

Отримано задачу Коші для диференційного рівняння першого порядку, яка описує зміну робочої довжини підсилення у залежності від навантаження:

$$\frac{d\lambda}{dH} = 0,5 \frac{\lambda^2 [th(H) + (2S \cdot th(H) - H)/ch^2(H)]}{1 + \lambda [H \cdot th(H) - \ln ch(H) + S/ch^2(H)]},$$

$$\lambda(H_0) = \lambda_0,$$

де: $S = 2\pi T_1 \alpha_p G / [(\kappa + 1) \tau_s^*]$, $H = \frac{\pi}{2\tau_s^*} \left[\frac{q}{2} - \frac{T_1}{\kappa + 1} (4G\alpha_p - \beta) \right]$, $\lambda = (\kappa + 1) \tau_s^{*2} a_{wr} / (2\pi G \gamma_{\tau}^*)$,

$\beta = 4G\alpha_0$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану; α_0 , G , ν – температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; α_p – температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу підсилення; τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина-підсилення; λ_0 , H_0 – фіксовані значення параметрів λ , H .

За одночасної дії температурного та силового навантажень залежно від фізико-механічних характеристик композиції можливий як їх взаємно підсилювальний так і послаблювальний вплив на відшарування підсилення. Чим менша робоча довжина підсилення, тим більше навантаження необхідне для його відшарування.

Куценко Олексій Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: alex_kutz@ukr.net;

Харитонов Олексій Михайлович кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: kharytonov@univ.kiev.ua

Харитонova Леся Василівна кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний транспортний університет, Київ, Україна,
e-mail: kharytonova-lv@ukr.net

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ФЛАНЦЯ З ПРИЄДНАНОЮ ОБИЧАЙКОЮ ПІД ДІЄЮ ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ

Куценко О.Г., Харитонов О.М., Харитонova Л.В.

Раніше авторами була запропонована теорія осесиметричного кручення тонких кілець довільного профілю, яка ґрунтується на гіпотезі плоских абсолютно жорстких поперечних перерізів. В роботі [1] наведені аналітичні вирази для ключових характеристик напружено-деформованого стану кільця, викликаного різними типами зовнішнього навантаження. Проте з практичної точки зору осесиметричне деформування окремо взятого кільця не становить особливої цінності. В реальних конструкціях практично завжди до кільця приєднані інші конструктивні елементи: труби, обичайки, тощо. Тому актуальною є побудова аналітичної моделі спільного деформування кільця з приєднаною до нього обичайкою.

В даній роботі розглядається осесиметрична деформація кільця, що складається з перехідного конуса, тарілки фланця та під'ятника, з приєднаною до нього обичайкою під дією тиску p_0 , прикладеного до їх внутрішніх поверхонь. Такий напружений стан є типовим для багатьох вузлів трубопроводів та обладнання. Основна ідея побудови аналітичної моделі полягає в спільному застосуванні теорії кручення тонких кілець [1] та теорії згину циліндричної оболонки (див., наприклад, [2]). Методом уявного перерізу система була розділена на кільце-фланець та обичайку. В спільному перерізі до обох частин було прикладено наперед невідомі перерізуюча сила Q_0 та згинаючий момент M_0 . Таким чином, окремо взятий фланець виявився навантаженим тиском p_0 , силою Q_0 та моментом M_0 . Для кожного з цих силових факторів в [1] наведено вираз для кута закручування (кута повороту) кільця. Кут повороту кільця знаходиться як сума кутів, викликаних кожною з трьох складових. Радіальне зміщення в перерізі приєднання обичайки до фланця знаходиться з умови обертання поперечного перерізу фланця як абсолютно твердого. Так само для циліндричної оболонки в [2] наведені вирази для радіального зміщення та кута нахилу крайнього перерізу в залежності від p_0 , Q_0 та M_0 . Невідомі значення Q_0 та M_0 визначаються з умов зшивки — умов неперервності радіального зміщення та кута нахилу в перерізі приєднання.

Розроблена аналітична модель адекватно описує процес деформування фланця з обичайкою, що підтверджується порівнянням з результатами чисельного моделювання методом скінченних елементів.

1. Куценко О.Г. Осесиметричне кручення тонких кілець під дією різних силових факторів / О. Г. Куценко, О. М. Харитонов, А. Г. Куценко, П. В. Дикий // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки – 2017. – №3. – С. 107–110.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физматгиз, 1966. – 635 с.

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ПРОГИНУ ОРТОТРОПНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Лавренюк М.В.

Розглядається пружна ортотропна неоднорідна прямокутна пластина на пружній основі, шарнірно закріплена з усіх сторін. Метою даної роботи є з'ясування придатності методу послідовних наближень та методу збурень для чисельного розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану такої пластины. Аналізуються залежності прогину від механічних і геометричних параметрів пластины і основи. В роботі використовується метод Нав'є для знаходження функції прогинів на кожному кроці ітераційного процесу та методи збурень та послідовних наближень як ітераційні методи розв'язання задачі.

Рівняння рівноваги для методу послідовних наближень для k -го ітераційного кроку запишеться у вигляді $D_x \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial y^4} + c_1 w^{(k)} = q^{(k)}$, де

$$q^{(k)} = \begin{cases} 0, k = 0 \\ q(x, y) - (D_{1,xx} + D_{1,yy}) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x^2} + 2(D_{1,xy} + 2D_{xy,xy}) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x \partial y} - (D_{1,xx} + D_{y,yy}) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial y^2} - \\ - 2\left(D_{x,x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^3} + D_{y,y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^3}\right) - 4(D_{xy,x} + D_{1,x}) \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x \partial y^2} - 4(D_{xy,y} + D_{1,y}) \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y}, k > 0 \end{cases}$$

Визначальні співвідношення [1] методу збурень для k -го кроку записується у вигляді:

$$w^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(k)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), a_{mn}^{(k)} = \frac{q_{mn}^{(k)}}{\left(D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2H \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + c_1\right)},$$

$$q_{mn}^{(k)} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^{(k)}(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy, w = \sum_{k=0}^{\infty} w^{(k)},$$

$$q^{(k)}(x, y) = -D_1 w^{(k-1)} - 2D_{1,x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w^{(k-1)} - 2D_{1,y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w^{(k-1)} - \Delta D_1 \Delta w^{(k-1)} + \\ + (1-\nu) \left(D_{1,xx} w_{,yy}^{(k-1)} - 2D_{1,xy} w_{,xy}^{(k-1)} + D_{1,yy} w_{,xx}^{(k-1)} \right), k \geq 1.$$

Для ізотропного матеріалу модуль Юнга задавався лінійною функцією координат, а коефіцієнт Пуасона та товщина платівки – постійними. Для анізотропного матеріалу D_x і D_y задавалися лінійними функціями координат, а D_{xy} та D_1 – постійними. Розглядалися пластины з фанери та з гіпотетичного крихкого ізотропного матеріалу, близького по модулю Юнга до текстоліту (для порівняння брався матеріал із коефіцієнтом Пуасона як середнє між коефіцієнтами Пуасона вздовж та поперек волокон зовнішніх шарів фанери. і модулем Юнга як середнє між α_x та α_y).

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок. – К.: Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2009. – 403 с.

Лимарченко Олег Степанович, професор, доктор технічних наук,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: olelim2010@yahoo.com;
Слюсарчук Юлія Анатоліївна, аспірант, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: julija0711@gmail.com

АНАЛІЗ ВПЛИВУ МАСИ РЕЗЕРВУАРУ НА ПОВЕДІНКУ СИСТЕМИ СФЕРИЧНИЙ РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Лимарченко О. С., Слюсарчук Ю.А.

Практичні потреби техніки зумовлюють інтерес до задач динаміки рідини, яка знаходиться в резервуарі. У більшості випадків рідина не цілком заповнює резервуар і при транспортуванні таких систем виникають коливання вільної поверхні. При великій відносній масі рідини її хвильові рухи істотніше впливають на поведінку системи. Для дослідження задачі було використано модель [1–2], яка була протестована для задач динаміки резервуарів з рідиною з вільною поверхнею в дорезонансному, резонансному та зарезонансному діапазонах зміни частот.

Досліджувався сумісний рух сферичного резервуару і рідини з вільною поверхнею при русі під дією періодичної сили $Y = A \sin(\omega t)$ в горизонтальній площині. Поведінка системи розглядалась для двох випадків: маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини $M_r = 0.2M_g$; маса резервуару в 5 разів більша за масу рідини $M_r = 5M_g$.

Для цієї задачі поведінку системи було розглянуто для частоти $0.5\omega_N$ в дорезонансному діапазоні, для частот $0.9\omega_N$, $0.98\omega_N$, $1.02\omega_N$ в малому околі резонансної частоти, а також для частот $1.1\omega_N$ та $1.5\omega_N$ більших за резонансні. Отримані результати порівнювались з результатами для циліндричного та конічного резервуарів. ω_N – власна частота сумісного руху рідини та резервуару, яка залежить від співвідношення їх мас.

Виявлено, що зі збільшенням маси резервуару і значення частоти вплив модуляції посилюється. Ефект модуляції коливань проявляється для випадку $M_r = 5M_g$ в білярезонансному та зарезонансному діапазонах зміни частот.

Для коливань системи в нелінійному діапазоні збурень характерним також є вплив вищих гармонік, який більш суттєво проявляється для частоти $0.5\omega_N$ та $1.5\omega_N$ у випадку, коли маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини. Аналіз коливань для більшого часового проміжку свідчить про те, що для коливань системи в резонансному діапазоні період модуляції для резервуару, який в 5 разів важчий за рідину, більший.

Отже, аналіз залежності розвитку динамічних процесів від співвідношення маси резервуару і маси рідини свідчить про те, що збільшення відносної маси рідини не сприяє виходу системи на впорядкований режим коливань. Помічено різницю прояву нелінійних процесів для дорезонансного, білярезонансного та зарезонансного діапазонів зміни частот. Виявлено прояв таких нелінійних ефектів як модуляція, вплив вищих гармонік, антірезонанс, дрейф середнього значення.

1. Лимарченко О. С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью // О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский / Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ" – 1997. – 348 с.
2. Limarchenko O. S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // O. S. Limarchenko / Ukrainian Mathematical Journal, 2007, Vol. 59, No. 1, P. 44-70.

РІВНОВАГА ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ІЗ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ, ЯКА ПОСЛАБЛЕНА ПОХИЛИМ РОЗРІЗОМ

Ловеїкін А.В.

Розглядається задача плоскої теорії пружності (плоска деформація) про рівновагу пружної півплощини $y > 0$, межа якої жорстко закріплена. Всередині півплощини із початку координат O , під кутом α до її межі, $0 < \alpha \leq \pi/2$, проведено прямолінійний розріз L одиничної довжини. Стінки розрізу перебувають під дією внутрішнього тиску. Основною метою роботи є визначення напружено-деформованого стану в півплощині.

Побудову розв'язку задачі зручно проводити у полярних координатах ρ, φ , в яких розбиваємо півплощину $y > 0$ на два кути: $\Omega_1 = \{\rho > 0, 0 < \varphi < \alpha\}$ та $\Omega_2 = \{\rho > 0, \alpha < \varphi < \pi\}$, які мають спільну сторону — промінь $\varphi = \alpha$, вздовж якого і проведено розріз L . При цьому, на променях $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$ мають виконуватись умови жорсткого закріплення межі півплощини, а на промені $\varphi = \alpha$ — умови, що описують дію тиску на стінки розрізу L (при $0 < \rho < 1$), та умови зшивання пружних полів на продовженні розрізу (при $\rho > 1$).

В кожному з кутів Ω_1 та Ω_2 вектор пружних зміщень подається через три гармонічні функції Папковича-Нейбера, дві з яких пов'язані між собою умовами Коші-Рімана [1]. Якщо подати невідомі гармонічні функції у вигляді інтегралів Мелліна за координатою ρ , то після виконання умов при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ та $\varphi = \alpha$ задача зводиться до системи двох функціональних рівнянь Вінера-Гопфа у симетричній, вертикальній смузі комплексної площини. Матриця системи належить до матриць Храпкова (Khrapkov type matrix) [2]. Після зображення матриці у спеціальному вигляді її факторизація будується через факторизацію двох аналітичних функцій комплексної змінної. Для факторизації цих функцій використовувалось подання однієї з них у вигляді нескінченного добутку за її нулями та зображення іншої у вигляді інтегралу типу Коші вздовж уявної осі. Отриманий розв'язок системи Вінера-Гопфа дозволив подати компоненти вектора пружних зміщень та тензора напружень у кожному з кутів $\Omega_{1,2}$ у вигляді інтегралів вздовж уявної осі від аналітичних функцій, обчислення яких можливе через теорію лишків.

Отримані в результаті явні вирази для зміщень та напружень дозволяють якісно та кількісно оцінити напружено-деформований стан у півплощині, зокрема, встановити форму берегів розрізу та характер розподілу напружень в околах вершин (кінців) розрізу.

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд — Ленинград: Наука. Ленинградское отделение, 1968. — 402 с.
2. Veitch B.H. On the commutative factorization of $n \times n$ matrix Wiener–Hopf kernels with distinct eigenvalues / B. H. Veitch, I. D. Abrahams // Proc. R. Soc. A. — 2007. — **463**. — P. 613–639.

Lu Zhang, fourth-year PhD research student, Wolfson School of Mechanical, Electrical and Manufacturing Engineering,
Loughborough University, United Kingdom,
e-mail: L.Zhang4@lboro.ac.uk;
Prof. Liguang Zhao,
Loughborough University, United Kingdom,
e-mail: L.Zhao@lboro.ac.uk;
Prof. Anish Roy,
Loughborough University, United Kingdom,
e-mail: A.Roy3@lboro.ac.uk;
Prof. Vadim Silberschmidt,
Loughborough University, United Kingdom,
e-mail: V.Silberschmidt@lboro.ac.uk;
Dr Gordon McColvin,
GE Power, United Kingdom,
e-mail: Gordon.Mccolvin@ge.com

THE SLIP-CONTROLLED SHORT-CRACK GROWTH IN SINGLE-CRYSTAL NICKEL SUPERALLOY: IN-SITU SEM OBSERVATION AND CRYSTAL PLASTICITY FINITE ELEMENT SIMULATION

Zhang L., Zhao L., Roy A., Silberschmidt V., McColvin G.

Initiation and growth of short cracks in a nickel-based single crystal were studied by carrying out in-situ fatigue experiments within a scanning electron microscope (SEM). Specimens with two different crystallographic orientations, i.e., [001] and [111], were tested under load-controlled tension fatigue in vacuum. Slip-caused crack initiation was identified at room temperature while initiation of a mode-I crack was observed at 650°C. Slip traces continuously developed ahead of the crack tip once initiated and acted as nuclei for early-stage crack growth at both room and high temperature (650°C). These slip traces were caused by accumulated shear deformation of activated octahedral slip systems, which were identified by analysing the surface slip traces and crack-propagation planes. The crack-growth rates were evaluated for a range of stress intensity factor, revealing the anomaly of slip-controlled short-crack growth. The effects of crystallographic orientations and temperature on fatigue crack growth were subsequently analysed and discussed, including the influence of microstructural features such as carbides and pores. Crystal plastic finite element method (CPFEM) simulation was implemented and shows the slip system activations. Low cycle fatigue (LCF) data were used to determine the model parameters. Accumulated crystallographic slip was used as a criterion to predict crack initiation sites and directions. The predicted active slip systems and crack formation sites obtained from CPFEM simulations were in good agreements with the experimental observations.

ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕНО-ЕЛЕМЕНТНО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Лубков М. В.

В наш час у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів фільтрації у пористих колекторських пластах, виникають унікальні можливості дослідження раніше недоступних фільтраційних процесів. Це перш за все стосується процесів, які протікають у специфічних неоднорідних продуктивних пластах нафтоносних і газоконденсатних родовищ. Недосяжність для прямих геологічних і фізичних вимірювань у більшості таких об'єктів, роблять математичне моделювання одним із основних інструментів дослідження.

Ця доповідь присвячена моделюванню і практичному застосуванню результатів у нафто і газовидобуванні.

Для вирішення цих практичних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницевий метод розв'язання нестационарної задачі п'єзопровідності для рідкої фази та задачі п'єзопровідності (Лейбензона) для газової фази з урахуванням інфільтрації відповідної фази на межах розглянутого пласта [1, 2]. У випадку нафтоносного деформованого пласта, враховуючи, що його товщина значно менше горизонтальних розмірів, достатньо скористатись двовимірною постановкою задачі п'єзопровідності у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \chi_n \left(\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} \right) + \gamma_n; \quad (1)$$

$$P_n(t=0) = P_n^0; \quad (2)$$

$$k_n \text{grad} P_n = \alpha_n (P_n - P_{cp}^n). \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння п'єзопровідності; (2) – початкова умова; (3) – умова інфільтрації нафти на межах розглянутого пласта; $P_n(x, y, t)$ – тиск, як функція координат і часу; χ_n – коефіцієнт п'єзопровідності нафти; γ_n – параметр витоку нафти в пласті; P_n^0 – початковий тиск нафти у пласті; k_n – коефіцієнт проникності нафтової фази; α_n – коефіцієнт інфільтрації нафтової фази на границях розглянутої області; P_{cp}^n – тиск на границях розглянутої області.

Відповідно у випадку газоносного пласта задача Лейбензона приймає вид:

$$\frac{\partial P_g^2}{\partial t} = \chi_g \left(\frac{\partial^2 P_g^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_g^2}{\partial y^2} \right) + \gamma_g; \quad (4)$$

$$P_g(t=0) = P_g^0; \quad (5)$$

$$k_g^2 \text{grad} P_g^2 = \alpha_g^2 (P_g^2 - P_{cp}^2). \quad (6)$$

Тут (4) – рівняння п'єзопровідності газу (Лейбензона); (5) – початкова умова; (6) – умова інфільтрації газової фази на межах розглянутого пласта.

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. - М.: Ин-т компьют. исслед., 2004. - 416 с.

2. Лубков М. В. Моделювання продуктивного тиску в неоднорідних нафтоносних пластах/ М.В. Лубков // Геоінформатика 2017. - N 3(63). - С. 23 – 29.

Мазко Алексей Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
 Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
 e-mail: mazkoag@gmail.com
 Котов Тарас Александрович, аспирант,
 Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
 e-mail: taras.kotov@gmail.com

СТАБИЛИЗАЦИЯ И ПОДАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Мазко А. Г., Котов Т. А.

Рассматривается класс линейных дескрипторных систем управления

$$E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^r, z \in \mathbb{R}^k$ и $y \in \mathbb{R}^l$ – векторы соответственно состояния, управления, ограниченных внешних возмущений, управляемого и наблюдаемого выходов, а все матричные коэффициенты соответствующих размеров постоянные и $\text{rank } E = \rho \leq n$.

Задача состоит в построении статического и/или динамического J -оптимального регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость нулевого состояния замкнутой системы и наименьшее значение интегрального критерия качества [1]

$$J = \sup_{(w, x_0) \in W} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \quad \|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^T Q z dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w dt, \quad (2)$$

где $\|z\|_Q$ ($\|w\|_P$) – обобщенная L_2 -норма вектор функции $z(t)$ ($w(t)$) с весовой матрицей $Q = Q^T > 0$ ($P = P^T > 0$), $X_0 = X_0^T \geq 0$ – весовая матрица влияния начальных возмущений x_0 , W – множество пар (w, x_0) , для которых $0 < \|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty$ и данная система имеет решение. Значение функционала (2) характеризует взвешенный уровень подавления внешних и начальных возмущений в системе управления.

Предлагаются критерии существования и алгоритмы построения статических регуляторов по наблюдаемому выходу $u = Ky$ и динамических регуляторов порядка $p \geq \rho$ с нулевым начальным вектором

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \quad (3)$$

обеспечивающих замкнутой системе свойства неимпульсивности, робастной устойчивости и заданную оценку критерия качества $J \leq \gamma$ [2]. Данные алгоритмы сводятся к решению систем ЛМН с ранговыми ограничениями и могут быть численно реализованы с использованием компьютерных систем Matlab и RTC Mathcad Prime. Приводятся численные примеры, иллюстрирующие работоспособность предложенных алгоритмов.

1. Мазко А.Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств / А.Г. Мазков // Праці Інституту математики НАН України. –Київ, 2016. –Т. 102. – 332 с.
2. Мазко О.Г., Котов Т.О. Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування /О.Г. Мазко , Т.О. Котов // Зб.праць Інституту математики НАН України. – 2018.–Т. 15, № 1. – С. 65–87.

Маковійчук Микола Васильович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: makoviuy@ua.fm;
 Шацький Іван Петрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: ipshatsky@gmail.com

ЗГИН ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ СИЛОЮ ТОНКОЇ ПЛАСТИНИ, РОЗТАШОВАНОЇ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ТА ПОСЛАБЛЕНОЇ КОНТАКТНОЮ ТРІЩИНОЮ

Маковійчук М.В., Шацький І.П.

Досліджується вплив спричиненої згином контактної взаємодії берегів тріщини на напружений стан та граничну рівновагу безмежної пластини на пружній основі Вінклера. Згин здійснюється зосередженою силою P , прикладеною на лінії тріщини на віддалі a від центру дефекту перпендикулярно до пластини. У рамках двовимірної постановки сформульовано крайову задачу для рівнянь плоского напруженого стану та згину пластини на пружній основі із взаємопов'язаними умовами контакту на лінії розрізу [1]:

$$D\Delta\Delta w + kw = P\delta(x-a)\delta(y), \quad \Delta\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2; \quad (1)$$

$$[u_y] = h |[\theta_y]| \geq 0, \quad M_y = h N_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин пластини; $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$, де h – півтовщина пластини, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; k – коефіцієнт жорсткості основи; Δ – оператор Лапласа; $L = (-l, l)$ – відрізок осі абсцис, що містить тріщину завдовжки $2l$; $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні пластини, $[\theta_y]$ – стрибок кута повороту нормалі на берегах розрізу; N_{ij} – мембранні сили, M_{ij} – моменти; $\delta(x)$ – функція Дірака.

Задача (1)–(3) відповідає симетричному відносно лінії контактної тріщини напруженому стану. Для побудови її розв'язку використано метод сингулярних інтегральних рівнянь та чисельний метод квадратур. Для оцінки граничного навантаження, при якому розпочинається поширення тріщини, застосовано енергетичний критерій руйнування за умов комбінованого розтягу-згину.

Якщо не враховувати контакт берегів тріщини, то слід розв'язувати перше з рівнянь (1) за класичної крайової умови $M_y = 0$ на розрізі та за умов (3) на безмежності.

На основі отриманих розв'язків задач з урахуванням та без урахування контакту досліджено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів в околі вершин дефектів, руйнівного навантаження, а також розподілу контактної реакції по довжині тріщини від координати точки прикладання зосередженої сили та від жорсткості основи. Встановлено область коректності постановки задачі, коли закриття тріщини відбувається по всій довжині.

1. Шацький І.П. Контактна взаємодія берегів тріщини під час згину пластини на пружній основі / І.П. Шацький, М.В. Маковійчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 3. – С. 59–62.

Максимюк Володимир Ананійович, доктор фіз.-мат. наук, старший наук. спів.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: desc@inmech.kiev.ua;
Сторожук Євген Анатолійович, доктор фіз.-мат. наук, проф.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: stevan@ukr.net;
Чернишенко Іван Семенович, член-кор. НАН України, доктор техн. наук, проф.,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: desc@inmech.kiev.ua

РЕТРОСПЕКТИВА ЗАДАЧІ ПРО ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Максимюк В.А., Сторожук Є.А., Чернишенко І.С.

Дано історичний огляд аналітичних, чисельно-аналітичних та чисельних розв'язків даної задачі. Ця одновимірна задача приваблює механіків вже півтора століття [1, с. 326–338]. Проте перші аналітичні розв'язки були надто спрощені. Так, розв'язок [1] для оболонки під дією внутрішнього тиску давав рівні за абсолютною величиною (це є спрощено), але різного знаку (це є правильним) значення моментів і переміщень у двох вершинах поперечного перерізу. Коректні результати, очевидно вперше (1933), були отримані Тимошенком і опубліковані в першому виданні монографії [2]. Моменти обчислювались за допомогою таблиці деяких коефіцієнтів для ряду значень відношення півосей еліпса. Процедура отримання коефіцієнтів не наводилась і залишилась невідомою.

Проте одному з співавторів вдалося знайти чисельно-аналітичний розв'язок даної задачі [3] і відтворити результати Тимошенка. Причому цей розв'язок дозволяє отримувати компоненти напружено-деформованого стану практично з будь-якою бажаною точністю, що дозволяє такому розв'язку бути тестом для чисельних методів. Принагідно відзначимо, що результати Тимошенка [2] рідко використовуються для порівняння як тести. На наш погляд це зумовлено притаманним даній задачі обчислювальним явищем мембранного замикання (locking), що проявляється у сповільненій, але, що важливо, стійкій збіжності простих чисельних методів. Проте збіжність можна покращити кількома запропонованими авторами способами [4], ефективність яких була продемонстрована на даній задачі.

Інколи появу замикання пояснюють “погано обумовленою матрицею”. На наш погляд причина явища замикання лежить в площині варіаційного числення, а не в площині алгебри. Зазвичай отриманню системи алгебраїчних рівнянь передують процедура варіювання певного функціонала. Варіюватись можуть тільки незалежні функції. Внаслідок невдалого вибору системи координат або системи варіюваних функцій чи деяких особливостей деформування конструкції між варіюваними функціями може виникнути деякий зв'язок. Саме він приводить до обчислювального явища замикання.

1. Bresse J.A.C.H. Cours de mécanique appliquée. Première partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions.– Deuxième Édition.– Paris: Gauthier-Villars, 1866.–536 p.
2. Timoshenko S. Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems. – 2nd Ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
3. Storozhuk E. A., Yatsura A. V. Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness / E. A. Storozhuk , A. V. Yatsura // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 313–325.
4. Maksimyyuk V.A. Using mesh-based methods to solve nonlinear problems of statics for thin shells / V.A. Maksimyyuk, E.A. Storozhuk , I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.– 2009. – 45, N 1. – P. 32–56.

ЗАСТОСУВАННЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЗУЧОСТІ НЕОДНОРІДНОГО ГЕОЛОГІЧНОГО МАСИВУ

Маслов Б.П.

Комп'ютерне моделювання механічних процесів у геологічних середовищах, властивості яких змінюються у часі, являє собою актуальну задачу сучасної прикладної механіки [1, 2]. Пропонується новий підхід до чисельно-аналітичного моделювання ефективних фізико-механічних властивостей флюїдонасиченої гірської породи з урахуванням її випадкової або періодичної мікроструктури. Модель базується на використанні фундаментальних співвідношень механіки в'язкопружного суцільного середовища, інтегральних перетворень Фур'є (FT) та Лапласа-Карсона (LC) із застосуванням відповідних чисельних алгоритмів [3, 4]. Розглянуто клас гірських порід, який може бути представленим неперервною матричною фазою, в яку вміщено мінеральні включення та пори різного формату. Одна або кілька фаз середовища можуть демонструвати нелінійну поведінку [3], що описується гіперпружними моделями типу Мурнагана (стисливі породи) або Муні-Рівліна (випадок нестисливості) [1]. Визначено параметри цих моделей для теригенної породи, яка складається із глинистої в'язкопружної матриці, в яку вкраплені лінійно пружні зерна кварцу і кальциту. Використано визначальні рівняння квазілінійної, у розумінні Работнова, в'язкопружності, а саме

$$\sigma^R(t) = (g * d\sigma)(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t_1) d\sigma(t_1), \quad g = J(t)/J(0), \quad \sigma^R = \frac{\partial W}{\partial e}, \quad W = W(e, x, t) \quad (1)$$

Тут $\sigma^R(t)$ - модифіковані напруження Работнова, $J(t)$ - тензорна функція повзучості, $e(x, t)$ - деформації повзучості, x - просторова координата, t - час. В наближенні малих деформацій отримано чисельні результати, та порівняно їх із лабораторними експериментальними даними [3], зроблено висновки про оцінку достовірності запропонованої чисельно-аналітичної моделі.

Перспективними напрямками подальших досліджень, на наш погляд, є узагальнення запропонованої моделі на випадок великих деформацій неоднорідного в'язкопружного середовища із попереднім гідростатичним навантаженням, що дозволить більш надійно оцінювати перспективність розвідки та експлуатації ущільнених порід-колекторів [2, 3].

1. Булат А.Ф. Прикладная механика упругонаследственных сред. Том 3. / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов – Київ: Наукова думка. – 2013. – 427 с.
2. Выжва С.А. Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических сред / С.А. Выжва, Б.П. Маслов, Г.Т. Продайвода // Геофизический журнал. — 2005. — №6, 27. – С.86-96.
3. Маслов Б. Моделювання нелінійних в'язко-пружних властивостей теригенно-вапняковистих пісковиків / І. Онищук, А. Шинкаренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Геологія. – 2017. – №2(77). – С. 99-105.
4. Maslov B.P. Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials/ B.P. Maslov // International Applied Mechanics. – 2018. – 54, 2. – P. 220-230.

Navid Mehreganian, PhD Candidate (Engineering) Mr.
Imperial College London, London, United Kingdom
e-mail: n.mehreganian14@imperial.ac.uk

Arash S. Fallah PhD (Engineering), Dr.
Brunel University London, London, United Kingdom
e-mail: mestasf@brunel.ac.uk

Luke A. Louca, (Engineering) Dr.
Imperial College London, London, United Kingdom
e-mail: l.a.louca@imperial.ac.uk

LARGE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF SQUARE MEMBRANES SUBJECTED TO LOCALISED PULSE PRESSURE LOADS

N. Mehreganian, A. S. Fallah, L.A. Louca

Ductile isotropic materials are widely used in protective systems against transient pulse pressure loads, such as those of localised blasts. This is due to the combined elastic-plastic response which contributes to dissipation of total impulse from extensive loading as the energy stored elastically limits deformation while the energy expended plastically limits the level of transferred forces in the structure. In the case of thin, modern armour graded steel plates, the tailored metallurgy helps the structure store energy within the bounds of elastic region, which may be dissipated at a later stage as damping kills it off in subsequent cycles. On the other hand, the plastic work is almost entirely converted to heat and dissipates.

The present work focuses on the elastic and plastic energies in the membrane and aims at deducing, from the minimization of Föppl-Von-Kármán (FVK) energy functional combined with enforcing the constitutive relations of limit analysis, the dynamic elastic-plastic response of localised blast loaded square membranes undergoing large deformations. The presumed blast load function is a multiplicative decomposition of a prescribed continuous piecewise smooth spatial function and an arbitrary temporal function which may assume various temporal shapes (e.g. rectangular, linear, exponential).

Considering the elastic response, a single-degree-of-freedom model was developed from the prescribed displacement field and associated stress tensor having clamped and simply supported boundary conditions. The explicit closed form solutions were sought by using the Ritz-Galerkin's variational method as well as the Poincaré-Lindstedt perturbation method. The theoretical solutions of rigid-perfectly plastic square membranes subjected to the same blast scenarios were then discussed. From the combined effects we deduce the load displacement curves representing the trajectory of the nonlinear elastic-perfectly plastic structure.

Можаровский Валентин Васильевич, доктор технических наук, профессор,
 УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Гомель, Беларусь,
 e-mail: mozh@gsu.by
 Москалева Марина Валерьевна, ассистент кафедры вычислительной математики и
 программирования, факультет математики и технологий программирования
 УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Гомель, Беларусь,
 e-mail: mari10102008@yandex.by

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИИ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ИЗ КОМПОЗИТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Можаровский В.В., Москалева М.В.

Рассмотрен алгоритм реализации метода определения деформации зубьев зубчатых колес из композитов с эвольвентным профилем (рисунок 1). Деформация определяется в точках однопарного зацепления, рассчитанных по [1]. Материалом зубчатого колеса является волокнистый композит с определенными модулями упругости матрицы и волокна.

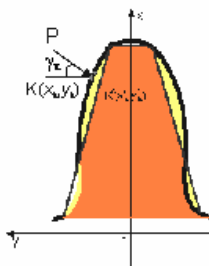


Рисунок 1 – Схема деформации зуба зубчатого колеса

Профиль зуба изображается текущими координатами $x; y$, и моделируется в виде клина с координатами $x'; y'$. Сила P действует в точке $K(x_k; y_k)$ (рисунок 1) к эвольвентному профилю и в точке $K'(x'_k; y'_k)$ к профилю клина.

Как известно, деформации зубьев складывается из трех составляющих изгибной δ_u , сдвиговой δ_{sd} и деформация сжатия δ_{sg} . Величина деформации в направлении силы P будет

$$\delta = \delta_u + \delta_{sd} + \delta_{sg} = y_u \cos \gamma_k + y_{sd} \cos \gamma_k + y_{sg} \cos \gamma_k$$

где y_u, y_{sd}, y_{sg} – соответствующие деформации, γ_k – угол давления в точке K .

Для расчета деформации зуба применяется теорема Кастильяно, представленной в [2]. Были также просчитаны случаи, когда профиль зуба рассматривался в виде параболы. Создана компьютерная программа расчета и проанализированы полученные результаты.

1. Старжинский, В. Е. О расчете параметров характерных точек n-парного зубчатого зацепления / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский. // Доклады Академии наук БССР. – М., 1975. – Т. 19, № 12. – С. 1082 – 1084.

2. Старжинский В.Е. О влиянии формы зуба на изгибную деформацию зубьев эвольвентных цилиндрических зубчатых колес / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский // Весці акадэміі навук Беларускай ССР. – 1974. – №4. – С 117–123.

Navid Navadeh,, PhD Candidate (Aeronautics), Mr.
Imperial College London, London, United Kingdom
Email: n.navadeh09@imperial.ac.uk

Ivan O. Goroshko, PhD Candidate (Physics&Mathematics),
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email: igoroshko@ukr.net

Arash S. Fallah, PhD (Engineering), Dr.
Brunel University London, London, United Kingdom
E-mail: mestasf@brunel.ac.uk

Yaroslav A. Zhuk, PhD (Physics&Mathematics), Dr. Sci. (Physics&Mathematics), Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email: y.zhuk@i.ua

AN AI APPROACH TO PARAMETER IDENTIFICATION FOR LOW VIBRATION MODES OF WIND TURBINE COMPOSITE ROTOR BLADES

N. Navadeh, I.O. Gorshko, A.S. Fallah, Y.A. Zhuk

An approach, based on the Finite Element Method (FEM) and Artificial Intelligence (AI), to construction of a beam-type simplified model of a horizontal axis wind turbine composite blade is proposed. The model allows effective and accurate description of low vibration bending modes taking into account the effects of coupling between flapwise and lead-lag modes of vibration transpiring due to the non-uniform distribution of twist angle in the blade geometry along its length. It is well-known that most of the dynamic response is in lower modes thus the study provides a quick assessment tool for the evaluation of the dynamic response. As twisting (torsional) modes do not contribute significantly to the response they have been excluded from the study. The identification of the simplified model parameters is carried out on the basis of modal data obtained by more detailed and accurate finite element simulations and subsequent adoption of the ‘DIRECT’ optimisation algorithm. Stable identification results were obtained using absolute deviations in frequencies as well as modal displacements in the objective function and additional *a priori* knowledge (boundedness and monotony) on the solution properties.

Lidiia Nazarenko, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
Institute of Mechanics, Otto von Guericke University Magdeburg, Germany,
 e-mail: lidia.nazarenko@ovgu.de;
 Henryk Stolarski, Dr.,
Department of Civil, Environmental and Geo- Engineering, University of Minnesota, USA,
 e-mail: stola001@umn.edu;
 Holm Altenbach, Dr.,
Institute of Mechanics, Otto von Guericke University Magdeburg, Germany,
 e-mail: holm.altenbach@ovgu.de

A MODEL FOR INTERPHASE DAMAGE EVALUATION IN RANDOM PARTICULATE COMPOSITES

An approach to the modeling of progressive damage of interphases in random particulate composites will be discussed. In the model the interphases are represented by layers of springs whose stiffness parameters change as a result of damage associated with gradually increasing loading. As a result, the interphases become progressively inhomogeneous, with their properties degrading according to a postulated damage model. This, in turn, causes the effective properties of the composite to become increasingly anisotropic. To capture the effects of interphase damage on the overall properties of the composite three ideas proposed with the author's participation are utilized. One is the Method of Conditional Moments (MCM) [2], a statistical homogenization technique developed in the past to analyze the effective properties of random composites without interphases. The second idea is the recently introduced notion of energy equivalent inhomogeneity (EEI) [1, 3], which replaces the particles of the composite and their interphases with homogeneous perfectly bonded particles whose properties are energetically determined in terms of the properties of the particles and properties of their interphases. The idea of the EEI allows methods devised to describe composites without interphases, such as MCM, to analyse problems with interphases. In addition, the notion of EEI permits to account for interphases with spatially varying properties, a feature critical from the point of view of their damage. The key feature associated with the combination of these two ideas is that it allows to evaluate stresses at the interphases of a statistically averaged composite. The new and the most important is the third idea concerning the development of the statistical interphase damage model [4]. In the proposed approach dispersed micro-damage of interphases is modeled by an increasing fraction of randomly distributed destructed springs in the spring layer. This aspect of the model is directly tied to the ability of evaluating interphase stresses, facilitated by employing the MCM and the EEI approaches. Some combination of normal and tangential interphase stresses (the so-called equivalent stress) is compared to the current value of the interphase micro-strength to determine what fraction of the yet-undamaged interphase springs will be damaged. The model assumes that the interphase micro-strength is not homogeneous (statistically homogeneous), and that it is described by one-point Weibull distribution function. In view of the strong nonlinearity of the problem, all three of the employed ideas will be used in an incremental/iterative scheme. The approach will be illustrated by numerical examples. They will concern composites with spherical particles under various loading scenarios. Interphase damage evolution will be examined for each type of loading. Comparisons with the existing numerical and experimental results will be described and the relative merits of the proposed approach will be discussed in this context.

1. Nazarenko L., Stolarski H. 2016. Energy-based definition of equivalent inhomogeneity for various interphase models and analysis of effective properties of particulate composites. *Comp. Part B*, 94, 82-94.
2. Nazarenko L, Stolarski H., Altenbach H. 2018a. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic components and aligned ellipsoidal inhomogeneities. *Int. J. Solids Struct.*, 136-137, 220-240.
3. Nazarenko L, Stolarski H., Altenbach H. 2018b. Effective properties of particulate composites with surface-varying interphases. *Composites Part B.*, 149, 268–284.
4. Khoroshun LP, Nazarenko LV. 2013. Deformation and damage of composite materials with anisotropic components, (Review). *Int. Appl. Mech.*, 49 (4), 388-455.

Нікітенко Віктор Миколайович¹, інженер,
e-mail: nivini55v@gmail.com;
Андрущенко Володимир Олександрович¹, інженер,
andron@univ.kiev.ua;
Горошко Іван Олегович¹, канд.фіз.-матем.наук, інженер,
e-mail: igoroshko@ukr.net;
Пучко Наталія Петрівна¹, математик,
e-mail: p_natalia@univ.kiev.ua;
¹ *Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

РЕЗУЛЬТАТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЕВОГО РЕЗОНАТОРА КРУГОВОГО ПЕРЕТИНУ

Нікітенко В.М., Андрущенко В.О., Горошко І.О., Пучко Н.П.

У доповіді наведені результати експериментального та теоретичного досліджень частотного спектра і форм коливань стрижневого резонатора циліндричної форми. Метою дослідження було знаходження зв'язаних і вироджених мод коливань, кінематика руху яких призводить до обертання часточок при реєстрації фігур Хладні.

Такий ефект може спостерігатися при двохкомпонентному переміщенні області резонатора з фазовими зсувами в районі 90 градусів.

Досліджувався циліндричний зразок стрижня довжиною 1 м і діаметром 0,08 м, виготовлений з алюмінієвого сплаву типу Д16Т. Збудження і реєстрація коливань виконувалися наклеєними певним чином п'єзоелементами. Співставлення частот поздовжніх і згинних коливань та частоти краєвої моди, знайдених при математичному моделюванні, показало похибку, що не перевищувала 0,5%.

Математичне моделювання дозволило ефективно ідентифікувати форми коливань, особливо на тих інтервалах частотного спектра, де експериментальне визначення утруднено.

Вдалося визначити першу згинну вироджену форму коливань, яка виникає внаслідок анізотропних властивостей матеріала чи недосконалості геометрії резонатора. При цьому було показано, що можна знайти такий частотний інтервал збудження, в якому можна спостерігати обертання частинок, а також ефект биття між парціальними частотами першої згинної моди.

Досліджено частотний спектр і виконано модовий аналіз в околі крайового резонансу. Знайдені інтервали частот, на яких спостерігається інтенсивне обертання і перемішування частинок піску на торцевій поверхні резонатора.

Виявлені ефекти і особливості планується масштабувати на резонатори з п'єзокераміки для використання їх при розробці нових чутливих елементів акселерометрів, датчиків кутової швидкості і технології сепарації мікро- і наночасток. Глибоке розуміння розглянутих ефектів також необхідне при проектуванні резонансних датчиків з великим діапазоном вимірювання (більше 80-90 Дб), коли необхідно максимально відійти від гармонічних і ангармонічних паразитних сигналів.

Онишкевич Володимир Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний лісотехнічний університет України, Львів, Україна,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua
Сулим Георгій Теодорович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна;
e-mail: gtsulym@gmail.com

УРАХУВАННЯ ЗНОШУВАННЯ ПРИ ПЛОСКОМУ КОНТАКТІ ПРЯМОКУТНОГО ШТАМПА З ПРУЖНОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ

Онишкевич В.М., Сулим Г.Т.

Задачі з урахуванням зношування вперше було розглянуто в [1, 2], а математичні моделі зношування було описано у [3]. Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під впливом прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної зі сталою швидкістю V_0 і втискується силою P . Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Поза штампом поверхня півплощини незавантажена. Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності за таких крайових умов [4]:

$$y = 0: \quad v = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a, \\ \sigma_y(x) = 0, \quad |x| \geq a; \quad \tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty.$$

Тут $f(x)$ – задані переміщення під штампом; a – півширина штампа; H_b – твердість матеріалу півплощини за Брінелем; τ – час; параметри $k_1, k_2, 0 \leq \alpha \leq 1$ окреслюють процес зношування.

Розв'язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парним інтегральним рівнянням, що призводять до системи нелінійних алгебричних рівнянь. При значеннях параметрів $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ ця система стає лінійною, причому ці крайні випадки є найбільш цікавими, оскільки дають можливість дослідити найменше й найбільше стирання. У разі $0 < \alpha < 1$ розв'язок задачі набуває проміжних значень, які можна обчислити з використанням методу простої ітерації.

Вивчено еволюцію контактних напружень та величини зношування в часі. При $\alpha = 0$ отримано збіг частинного випадку з відомими результатами [1].

Відзначимо, що на одержаний розв'язок потрібно накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження $\tau_{yz} = f_T \sigma_y$, де f_T – коефіцієнт тертя, а σ_y визначаються рядом Фур'є.

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа / Л.А. Галин // ПММ. – 1976. – **40**. №6. – С. 981-989.
2. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей / Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
3. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел / В.М. Александров // ДАН СССР. – 1983. – **271**. №4. – С. 827-831.
4. Левицький В.П., Онишкевич В.М. Осесимметрична контактна задача із зношуванням / В.М. Онишкевич // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 38. – С. 60-63.

Опанасович Віктор Костянтинович, доктор фізико-математичних наук, професор,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,

е-mail: kafmech@franko.lviv.ua;

Слободян Микола Степанович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,

е-mail: slobkolia@gmail.com;

Білаш Оксана Вікторівна, кандидат економічних наук,

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів,
Україна,

е-mail: oksana.bilash@gmail.com

ЧИСТИЙ ЗГИН ПОЛОСИ (БАЛКИ) З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Опанасович В.К., Слободян М.С., Білаш О.В.

В роботі досліджено чистий згин моментами M полоси (балки) з наскрізною прямолінійною довільно розміщеною тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Залежно, де розміщена тріщина у балці, її береги можуть не контактувати, частково або повністю гладко контактувати (див. рис. 1 а) – 1 в)).

Виберемо декартову систему координат Oxy з початком координат у центрі тріщини завдовжки $2l$, направивши вісь Ox на ній. Лінію осі Ox , де береги тріщини контактують чи не контактують, позначимо відповідно через L і L_1 . Відстань центру тріщини від осі балки позначимо через y_0 . Координати точки, що розмежовує область контакту берегів тріщини з контактуючого її частиною, позначимо через λ . Кут, що утворює тріщина з віссю балки, позначимо через α .

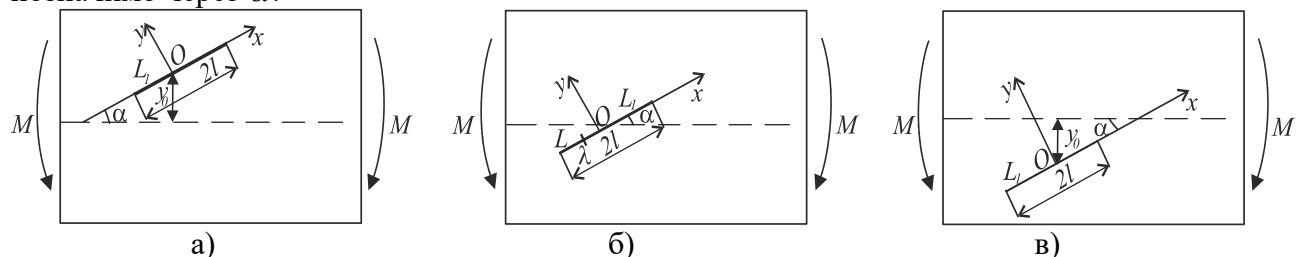


Рис. 1. Схема навантаження полоси (балки) та можливі випадки розташування тріщини
Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови:

- випадок а) $\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} = 0$, на L_1 ;
- випадок б) $\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} = 0$, на L_1 ; $\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}$, $\sigma_{xy}^{+} = \sigma_{xy}^{-}$, $v^{+} - v^{-} = 0$, на L ;
- випадок в) $\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}$, $\sigma_{xy}^{\pm} = 0$, $v^{+} - v^{-} = 0$, на L ;

де σ_{yy} і σ_{xy} – компоненти тензора напружень; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$; v – компонента вектора переміщення точки балки на вісь Oy .

Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі, розв'язок поставленої задачі зведено до задач лінійного спряження та знайдено їх аналітичний розв'язок. Проведено аналіз задачі, коли береги тріщини не контактуватимуть або контактуватимуть по всій її довжині чи по частині. Для випадку, коли береги тріщини частково контактують, визначено значення довжини області контакту її берегів. Одержано вираз для коефіцієнтів інтенсивності напружень. Виходячи з енергетичного критерію руйнування, знайдено граничне значення моменту M , при якому тріщина почне поширюватися. В часткових випадках одержано відомі в літературі результати, отримані у працях В. В. Панасюка та Б. Л. Лозового.

Остос Олександр Хосейович, аспірант, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com
Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
e-mail: y.zhuk@i.ua

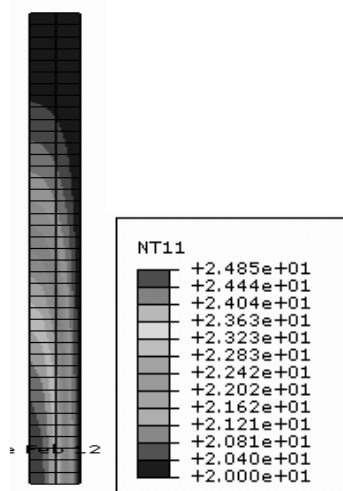
ВПЛИВ ПОПЕРЕДНЬОГО ДЕФОРМУВАННЯ НА ЦИКЛІЧНУ ТЕРМОМЕХАНІЧНУ ПОВЕДІНКУ ЕЛАСТОМЕРНОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО СТЕРЖНЯ

Еластомерні елементи конструкцій широко використовуються в сучасній практиці. Термомеханічна поведінка еластомерів при циклічних навантаженнях зумовлена перш за все ефектами зв'язаності механічних і теплових полів: як залежністю властивостей від температури, так і необоротними втратами механічної енергії внаслідок дисипації, що призводить до виділення тепла [1]. Разом з такими параметрами зовнішнього впливу як частота, температура та амплітуда навантаження попередній напружено-деформований стан за певних умов також може суттєво вплинути на коливання конструкції.

Дана робота присвячена дослідженню зв'язаної термомеханічної поведінки еластомерних елементів конструкцій з врахуванням фізичної нелінійності та попереднього деформування. Для описання такої поведінки еластомерних матеріалів застосовуються різноманітні моделі й підходи: інтегральні, інтегро-диференціальні та диференціальні, які використовують концепцію проміжних станів, для узагальнення реологічних моделей на випадок великих деформації. У цьому дослідженні розвивається підхід, що ґрунтується на використанні концепції комплексних модулів та амплітудних визначальних рівняннях, які формулюються в термінах амплітуд основних польових величин [1]. Задачу про термомеханічну поведінку попередньо zdeформованого еластомерного стержня, який перебуває під дією гармонічного навантаження, аналогічно із [2], розв'язано шляхом лінеаризації рівняння руху в околі попереднього стану. Лінеаризовану задачу в термінах комплексних амплітуд основних польових змінних розв'язано із

застосуванням 3-вимірної модифікованого методу скінченних елементів, який узагальнено на випадок амплітудних співвідношень при гармонічному деформуванні. Зокрема розв'язано задачі про коливання і дисипативний розігрів скінченних циліндричного стержня та порожнистого циліндра, що перебувають під дією заданого гармонічного силового збудження на верхньому торці. Задачі розв'язано як в осесиметричній, так і в неосесиметричній постановці. Побудовано амплітудно- та температурно-частотні характеристики коливань за різних теплових умов [3] на бічній поверхні та торцях циліндра і стержня. Типові дані по вібраційному розігріву стержня за умов сталої температури на бічній поверхні та теплоізолюваних торців представлено на рисунку.

1. Карнаухов В.Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, Б. П. Гуменюк .– Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
2. Карнаухов В.Г. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В.Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк .– Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
3. Bergman T. L. Fundamentals of heat and mass transfer / T. L. Bergman, A. S. Lavine. – Wiley, USA. – 2017. – 1043 p.



К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТАЛОСТИ ПРИ ДВУХОСНОМ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ СТАТИЧЕСКИМ КРУЧЕНИЕМ И СИММЕТРИЧНЫМ ЦИКЛИЧЕСКИМ ИЗГИБОМ

Решается задача расчета усталостной долговечности и предельного состояния конструкционных материалов при одновременном воздействии статического кручения и симметричного циклического изгиба. Решение построено на основе модели предельного состояния в форме степенной трансцендентной функции и концепции эквивалентных напряжений [1]:

$$\frac{\sigma_a^b}{\sigma_n^b} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right]^\chi; \quad n_R = \frac{1}{(1+q)D \left((\sigma_a^b)_{eqv} \right)^q}; \quad (\sigma_a^b)_{eqv} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right]^{-\chi} \sigma_a^b, \quad (1)$$

где σ_a^b – амплитуда циклического напряжения при изгибе; σ_n^b – ограниченные пределы усталости при симметричном изгибе; τ_m – статические касательные напряжения; τ_B – предел кратковременной прочности при кручении; χ – коэффициент чувствительности материала к совместному воздействию нормальных и касательных напряжений.

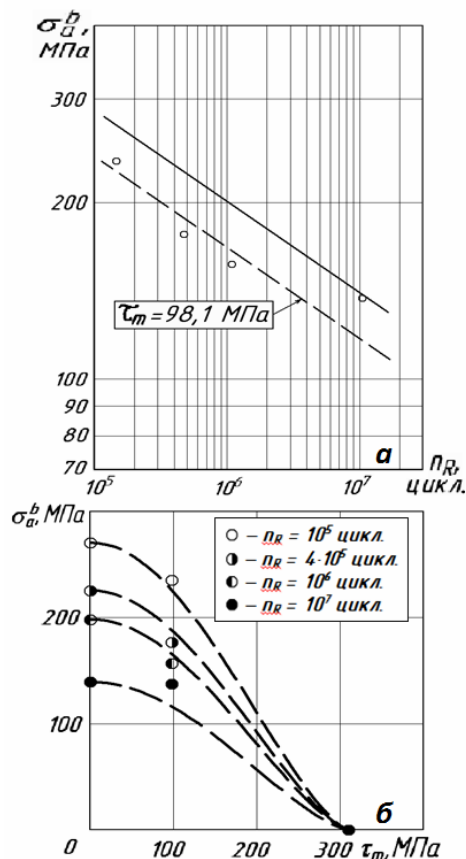


Рис. 1

Число циклов до разрушения n_R в зависимости от амплитуды циклических напряжений изгиба σ_a^b по параметру статической компоненты кручения τ_m , исходя из (1), определяется по уравнению

$$n_R = \frac{1}{\left[(1+q)D \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right\}^{-q\chi} (\sigma_a^b)^q \right]}, \quad (2)$$

где D и q – параметры кривых усталости при симметричном цикле нагружения.

Значение амплитуды циклических напряжений изгиба σ_a^b в зависимости от статической компоненты τ_m по параметру числа циклов до разрушения n_R , исходя из (1), рассчитывается по уравнению

$$\sigma_a^b = \frac{1}{\left[(1+q)Dn_R \right]^{\frac{1}{q}}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_m}{\tau_B} \right) \right]^\chi. \quad (3)$$

Результаты расчетов (штриховые линии) усталостной долговечности (рис. 1,а) по уравнению (2) и предельного состояния (рис. 1,б) по уравнению (3) сопоставлены с экспериментальными данными (точки) и получено удовлетворительное согласование.

1. Голуб В.П. Метод расчета усталостной долговечности элементов конструкций при двухосном комбинированном нагружении / В.П. Голуб // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – Том. 106. – №9. – С. 159 – 165.

ЗАЛИШКОВІ НАПРУЖЕННЯ В ПРУЖНОМУ СТЕРЖНІ З ЗОВНІШНІМ СУХИМ ТЕРТЯМ ПРИ УДАРІ З ДОВАНТАЖЕННЯМ ПРИТИСКУ

Перепічка В.В.

Динаміка процесу взаємодії стержневих систем з довкіллям за складних умов контакту на бічних поверхнях стержнів є актуальною проблемою в моделюванні багатьох процесів природного та техногенного характеру. Важливим моментом поставлень прикладних задач динаміки конструкцій з використанням класичної теорії стержнів та моделі фіксованого кулонівського тертя є можливість аналізу розсіювання енергії за рахунок фрикційного проковзування в контакті. Відомі задачі розповсюдження ударних хвиль у стержнях із зовнішнім сухим тертям докладно описано у праці [1].

Розглядається нестационарна задача про розповсюдження збурення у півнескінченному пружному стержні з зовнішнім сухим тертям за умов удару та подальшого, обмеженого в часі, довантаження сили притиску на торці за лінійним законом. Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщення стержня $u(x, t)$ в рамках гіпотези Бернуллі має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{u''}{L} + \frac{\tau_x}{E} &= \frac{\ddot{u}}{L}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ \tau_x &= -\tau_c \operatorname{sgn} \dot{u}, \quad \dot{u} \neq 0 \quad \text{або} \quad \dot{u} = 0, \quad |\tau_x| < \tau_c; \\ u(x, 0) &= 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0; \\ \frac{u'(0, t)}{L} &= -\frac{\sigma_0}{E} [(1 + Kt)H(t) - K(t - a)H(t - a)], \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Тут $x = X/L$, $t = cT/L$ – безрозмірні координата та час; $L = F/\Pi$ – характерний розмір, а F , Π – площа та периметр поперечного перерізу стержня; τ_x – дотичне напруження на бічній поверхні, τ_c – порогове значення дотичних напружень в моделі сухого тертя; K – безрозмірний параметр що характеризує швидкість зміни притиску на торці ($K = L\Delta/c\sigma_0$), σ_0 і Δ – відповідно напруження удару та приріст напруження за одиницю часу на торці стержня під час довантаження; $a = ct/L$, де t – момент часу стабілізації зусилля притиску; $c = \sqrt{E/\rho}$ – акустична швидкість в стержні, ρ , E – густина та модуль Юнга матеріалу стержня, $H(t)$ – функція Гевісайда.

Побудовано аналітичний розв'язок сформульованої нестационарної крайової задачі. Проаналізовано вплив ефекту довантаження притиску торця та фактору стабілізації зусиль притиску на структуру області руху, на розподіл нестационарних полів переміщення, швидкості та напружень. Отримано залежності як для проміжних залишкових напружень, що можуть виникати після тимчасового стопоріння руху внаслідок малої інтенсивності довантаження, так і для остаточних залишкових напружень, що встановлюються на боковій поверхні стержня після зупинки руху в збуреній ділянці внаслідок стабілізації зусилля притиску.

1. Никитин Л. В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением / Л. В. Никитин. – М.: Моск. лицей, 1998. – 272 с.

ЩОДО МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮЖДЕННЯ ТРІЩИНИ ВТОМИ В ТОНКІЙ ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ В УМОВАХ ДВОВІСНОГО АСИМЕТРИЧНОГО РОЗТЯГУ-СТИСКУ

Плащинська А.В.

Розглянуто моделювання процесу руйнування від втоми тонкої ізотропної нескінченної пластини з тріщиною нормального відриву довжиною 2ℓ в умовах двовісного асиметричного циклічного навантаження. Береги тріщини вільні від навантаження. Назовні в напрямку осей OX та OY пластина знаходиться під дією двовісного асиметричного циклічного навантаження

$$\tilde{\sigma}_{ij}(n) = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} \sin(2\pi n), \quad (i = j = 1, 2), \quad (1)$$

де $(\sigma_m)_{ij}$ та $(\sigma_a)_{ij}$ – середні напруження та амплітуди циклічних напружень; n – число циклів навантаження. Для розв'язку задачі застосовано два види критеріїв еквівалентних напружень. Перший – зводить асиметричне циклічне навантаження (1) до еквівалентного за часом до руйнування симетричного циклічного навантаження

$$(\tilde{\sigma}_{ij}(n))_{eqv} = (\sigma_{a,eqv})_{ij} \sin(2\pi n) = \left[\cos \left[\frac{\pi (\sigma_m)_{ij}}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{ij} \sin(2\pi n), \quad (2)$$

де $(\sigma_{a,eqv})_{ij}$ – амплітуди еквівалентних симетричних циклів; σ_B – межа міцності матеріалу; η – коефіцієнт чутливості матеріалу до асиметрії циклу навантаження. Другий – зводить плоский напружений стан в околі вершини тріщини за одним із класичних критеріїв еквівалентності до одновісного. Інтегруючи еволюційне рівняння накопичення пошкоджень, що надано в [1], отримуємо нелінійне інтегральне рівняння руху фронту руйнування внаслідок втоми

$$\begin{aligned} 1 - (1+q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau = \\ = (1+q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_*}^n \left[\frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язок (3) містить систему рівнянь двостадійної моделі розповсюдження тріщини втоми в тонкій нескінченній ізотропній пластині в умовах двовісного асиметричного розтягу-стиску

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q} \right) D \left(\frac{4\sigma_Y}{\pi} \right)^{q-2} \left[\cos \left[\frac{\pi (\sigma_m)_{yy}}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-2\eta} (\sigma_a)_{yy}^2 \ell(n) \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left(\frac{\pi}{4\sigma_Y} \right)^q \end{cases}, \quad (4)$$

де n_* – тривалість інкубаційної стадії; σ_Y – межа течії матеріалу пластини; D , q – коефіцієнти степеневого закону накопичення пошкоджень внаслідок втоми.

1. Голуб В.П., Плащинская А.В. Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении / В.П. Голуб, А.В. Плащинская // Прикл. механика. – 1994. – Том 30. – №7. – С. 53-63.

Попов Всеволод Геннадійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
 e-mail: dr.vg.popov@gmail.com;
 Литвин Оксана Вікторівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
 e-mail: litvinov.od@gmail.com

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ТРИЛАНКОВИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Попов В.Г., Литвин О.В.

Нехай у необмеженому пружному середовищі, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації, міститься триланкове в перерізі тонке абсолютно-жорстке включення. На включення діє гармонічна зсувна вздовж осі Oz сила $P e^{-i\omega t}$. За умов антиплоскої деформації єдина відмінна від 0 z -компонента вектора переміщень $W(x; y)$ в системі координат xOy задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}. \quad (1)$$

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною його ланкою пов'язується система координат $x_k O_k y_k$. Включення передбачається повністю зчепленим з зовнішнім середовищем і на ланках включення є розрив дотичних напружень, для стрибків яких введено позначення

$$W(x_k; y_k) = d, \quad \tau_{zy_k}(x_l, +0) - \tau_{zy_k}(x_l, -0) = \chi_{lk}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1; 2; 3. \quad (2)$$

Метод розв'язання ґрунтується на поданні переміщення у вигляді суми розривних розв'язків рівняння Гельмгольца, побудованих для кожної ланки включення [1]. Після задовільнення умов на включенні задача зведена до системи інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків напружень (2). Сингулярна складова рівнянь системи окрім ядра Коші містить ще і ядро з нерухомою особливістю. До системи необхідно додати рівність для визначення невідомої амплітуди коливання включення d .

Одним з основних результатів є числовий метод розв'язання отриманої системи. Цей метод враховує особливість розв'язку, який шукається у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= (1 + \tau)^{-\frac{1}{2}} (1 - \tau)^{-\delta_1} \psi_1(\tau), \quad \varphi_2(\tau) = (1 + \tau)^{-\delta_1} (1 - \tau)^{-\delta_2} \psi_2(\tau), \\ \varphi_3(\tau) &= (1 + \tau)^{-\delta_2} (1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \psi_3(\tau). \end{aligned}$$

Показники степеня δ_1 та δ_2 визначаються так само як і в [2]. Далі, як в [2], використовується знайдений спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів. За характеристику напруженого стану поблизу включення прийняті узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), значення яких виражені через наближений розв'язок системи інтегральних рівнянь.

1. Попов В.Г. Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении / В.Г. Попов. – Москва: Изв. РАН, Механика твердого тела, 1992. – №3. – С. 139–146.
2. Литвин О.В., Попов В.Г. Напружений стан у пружному тілі з v -подібним жорстким включенням при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву / О.В. Литвин, В.Г. Попов. Дніпро: Вісник Дніпропетровського нац. ун-ту. Серія «Механіка неоднорідних структур». 2017. -Вип. 2(21). С. 89-104

Прокопечко Уляна Сергіївна, аспірант,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: demeshun28@rambler.ru;
 Шацький Іван Петрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: ipshatsky@gmail.com;

ЗАДАЧА ДИНАМІКИ ДЛЯ СТРУНИ, РОЗТАШОВАНОЇ НА ОСНОВІ З ДРОБОВОЮ РЕОЛОГІЄЮ

Прокопечко У. С., Шацький І. П.

Пошук адекватних моделей взаємодії стержневих та тонкостінних конструкцій з довколишніми тілами продукує інтерес до конституційних рівнянь, які характеризують властивості середовищ за допомогою нелокальних за координатою та/або за часом співвідношень.

Досліджується нестационарна взаємодія безмежної струни з недеформівним фундаментом через тонкий прошарок, реологічні властивості якого описуються дробовою похідною від переміщення за часом. Початково-крайова задача для гіперболічного рівняння в безрозмірних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b D_t^\alpha u - P(t) \delta(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \quad (2)$$

$$u(\pm\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Тут $u(x, t)$ – поперечне переміщення струни, b – безрозмірна дробова в'язкість прошарку, D_t^α – похідна Капуто за часом ($0 \leq \alpha \leq 1$) [1], $P(t)$ – інтенсивність зосередженого навантаження, $\delta(\cdot)$ – функція Дірака.

Аналітичний розв'язок задачі (1)–(3) побудовано методом інтегрального перетворення Лапласа за часом. Зокрема, для ударного навантаження у вигляді сходишки Гевісайда $P(t) = p_0 H(t)$ знайдено нестационарний відгук динамічної системи (динамічне переміщення струни в точці прикладання навантаження):

$$u(0, t) = p_0 t \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)_n \frac{(bt^{2-\alpha})^n}{\Gamma(2 + (2-\alpha)n) \Gamma(n+1)},$$

де $(\cdot)_n$ – символ Похгамера, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція.

Проаналізовано властивості нестационарних полів переміщення, швидкості та реакції основи залежно від показника дробової похідної. У часткових випадках $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ отримуються традиційні результати, які описують розповсюдження нестационарного збурення у струні, розташованій на пружній основі Вінклера та на прошарку ньютонівської рідини відповідно.

1. Podlubny I. Fractional differential equations / I. Podlubny. – San Diego: Academic Press, 1999. – 368 p.

ВИЗНАЧЕННЯ КВАЗІСТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ПЛОСКОШАРУВАТИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ

Процюк Б.В.

У роботі проілюстровано методику визначення квазістатичного термопружного стану плоскошаруватих вільних від силових навантажень термочутливих (з температурнозалежними фізико-механічними характеристиками (ФМХ)) тіл за лінійних теплових граничних умов.

Розглядається тришарова термочутлива плита, одна з обмежувальних поверхонь якої нагрівається змінним у часі тепловим потоком, а інша підтримується при змінній у часі температурі. Шари, початкова температура яких співпадає з нижньою межею діапазону зміни теплофізичних характеристик, ідеально контактують. Одновимірне нестационарне температурне поле і зумовлений ним термопружний стан такої плити визначені [1,2] за припущення, що матеріали шарів володіють простою нелінійністю (відношення залежних від температури коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей є сталим). Тут квазістатичний стан визначено, коли зазначене відношення нестало, тобто коефіцієнти температуропровідності шарів залежать також від температури.

Знаходження температурного поля передбачає [3] використання перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, відповідної функції Гріна лінійної задачі теплопровідності для тришарової плити, точних сум відповідних рядів, зокрема тих, для яких характерний ефект «Гібса» (відомий з математичного аналізу), лінійних сплайнів та розв'язання рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь відносно значень у вузлах сплайну змінної Кірхгофа на поверхнях поділу та похідної за часом на внутрішніх плоско-паралельних поверхнях шарів. Напруження, для яких головні вектор і момент на циліндричній поверхні дорівнюють нулю, знайдено за формулами [1].

Числові розрахунки виконано для системи кераміка – титановий сплав – сталь за сталої і змінної (імпульсної) інтенсивності теплового потоку (кількість прямокутних імпульсів не перевищувала трьох) та таких товщин шарів: першого і другого – 1 мм, третього – 10 мм. Температура протилежної поверхні така ж, як початкова.

Точність розв'язку задачі теплопровідності досліджували у випадку сталої інтенсивності теплового потоку. Зокрема показано, що для одних і тих же часів, близьких до виходу на стаціонарний режим, безрозмірні температури, підраховані з кроками сітки сплайну 0.015625 і 0.0078125 с, відрізняються менш ніж на 10^{-7} , а від температури, підрахованої на основі точного розв'язку відповідної нелінійної стаціонарної задачі, менш ніж на 0.00034.

Проводили порівняння з термопружним станом, який визначено за припущень простої нелінійності і сталих ФМХ.

1. Процюк Б.В. Квазістатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком / Б.В. Процюк // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63-69.
2. Процюк Б.В., Горун О.П. Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну / Б.В. Процюк, О.П. Горун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С.179-185.
3. Процюк Б. Метод інтегральних рівнянь у нестационарних задачах теплопровідності термочутливих тіл / Процюк Б. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вып. 10. – С. 96-105.

ДЕМПФІРУВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН З ОДНОЧАСНИМ ВИКОРИСТАННЯМ СЕНСОРІВ ТА АКТУАТОРІВ

Досліджується вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфірування вимушених гармонічних резонансних коливань тонких в'язкопружних пластин з одночасним використанням розподілених сенсорів та актуаторів за допомогою варіаційних та чисельних методів. Для вимушених ізотермічних поперечних коливань ортотропних пластин варіаційне формулювання задачі в просторі перетворених по Лапласу величин має вигляд:

$$\delta \bar{\mathcal{E}}(x, y, z) = 0, \bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \int_F \left\{ \bar{D}_{11} (\bar{w}_{,xx})^2 + 2 \bar{D}_{12} \bar{w}_{,xx} \bar{w}_{,yy} + \bar{D}_{22} (\bar{w}_{,yy})^2 + 2 \bar{D}_{66} (\bar{w}_{,xy})^2 + \right. \\ \left. + \tilde{\rho} s^2 \bar{w} - 2 \bar{p}_0 \bar{w} - 2 \bar{M}_0 (\Delta \bar{w}) \right\} dx dy. \quad (1)$$

Тут рисочка означає перетворену за Лапласом величину і припускається, що на пластину діє лише нормальний до серединної площини тиск. Прогин представляється у вигляді ряду за деякою повною системою функцій, наприклад, за власними функціями лінійної задачі про власні коливання пружної пластини. З використанням варіаційного методу приходимо до лінійної системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь за часом, для розв'язку якої застосовуємо класичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ). У випадку неізотермічних стаціонарних коливань основна увага зосереджена на демпфіруванні найбільш енергоємної першої моди вимушених резонансних коливань. При цьому прогин і температура апроксимуються деякими функціями, які задовольняють граничним умовам:

$$w = A \tilde{w}(x, y), \quad \theta = \theta_1 \tilde{\theta}(x, y). \quad (2)$$

Якщо прийняти гіпотезу, що температура постійна по товщині пластини, то для неізотермічних вимушених коливань у функціоналі (1) слід опустити рисочку і всі величини під інтегралом вважати комплексними та залежними від осередненої по товщині температури. При цьому слід замінити s^2 на $-\omega^2$. Температура дисипативного розігріву знаходиться з функціоналу:

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{1}{2} \iint_{(S)} \left\{ \lambda_{11} (\theta_{,xx})^2 + \lambda_{22} (\theta_{,yy})^2 + \frac{2\alpha}{h} \theta^2 - \frac{1}{h} \int_0^\theta W(\theta) d\theta \right\} dx dy. \quad (3)$$

Використовуючи функціонали (1), (3), варіаційним методом одержимо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно A, θ_1 . Ця система буде залежати від параметрів p_0, M_0 . Довільний параметр M_0 вибирається з умови компенсації тих чи інших мод коливань. Крім того, для забезпечення достовірності результатів застосовувався метод Бубнова-Гальоркіна. Аналітичні розв'язки, одержані з використанням вказаних двох методів, співпадають. Також одержано прості формули, які дають інформацію про зміну з температурою показників сенсора та про зміну різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Визначено максимальне механічне навантаження, яке не приводить до температури Кюрі, після досягнення якої сенсор та актуатор перестають виконувати своє функціональне призначення.

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
2. Карнаухов В.Г. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами / В.Г. Карнаухов, Т.В. Карнаухова, Е.В. Пятецкая // Прикладная механика. – 2010. – Т.46. – № 1. – С. 94 -104.

УСТАЛЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ БАЦІ ПРИ ОРБІТАЛЬНИХ ЗБУРЕННЯХ

Райновський І.А.

Розглядається ідеальна нестислива рідина, що частково заповнює твердий вертикальний циліндричний бак. Бак рухається періодично по орбітальній траєкторії в горизонтальній площині із частотою, близькою до власної частоти коливання рідини, глибина якої $h > 1$ (обезмірена по R_0 , де R_0 – радіус посудини) для уникнення вторинних резонансів.

Використовується асимптотична модальна теорія Наріманова-Моїсєєва для вивчення поведінки кругової хвилі в баках із круговим перерізом, та виводиться її асимптотичний періодичний розв'язок для орбітальних збурень баку. Виведено альтернативну форму секулярної системи (умови розв'язності) через інтегральні амплітудні параметри A та B і зсуви фаз ψ та φ . В рівняння Наріманова-Моїсєєва включено лінійні члени, що відповідають за *демпфування*. Коефіцієнти демпфування не обмежуються ефектом ламінарного шару рідини на змочених стінках баку, а, швидше, представляють сумарний ефект рідних дисипативних феноменів, включаючи перекидання хвилі, яка, для прикладу, була успішно змодельована шляхом збільшення цих коефіцієнтів для поздовжнього збурення бака у роботі Фалтінсена О.М., Рогнебака О.Ф. та Тимохи О.М. [4]. Цей підхід не працює для кругових збурень. Вихоровість *не* включено в математичну модель. Використовуючи цей розв'язок, побудовано амплітудно-частотні характеристики в просторі. Особливу увагу приділено круговим збуренням баку та максимальним підйомам хвилі біля його стінок.

Теоретичні результати порівнюються із існуючими експериментальними даними. Підйоми хвиль біля вертикальної стінки добре узгоджуються із експериментами до моменту перекидання хвилі чи інших феноменів внаслідок додаткової дисипації в системі. Цікавим фактом є те, що збільшення/пониження коефіцієнтів демпфування в математичній моделі не дає результату в покращенні вимірюваних значень в діапазоні частот, де спостерігаються перекидання хвилі та усталені потоки Прандтля. Це означає, що подальші модифікації математичної (гідродинамічної) моделі повинні розглядати вихоровість.

1. Raynovsky I.A. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion / I.A. Raynovsky, A.N. Timokha // Mathematical Problems in Engineering. – 2018. – **2018**, Paper ID 5487178. – P. 1-9.

2. Faltinsen, O.M. Resonant sloshing in an upright annular tank // O.M. Faltinsen, I.A. Lukovsky, A.N. Timokha // Journal of Fluid Mechanics. – 2016. – Vol. 804. – P. 608-645.

3. Райновський І.А. Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моїсєєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці / Райновський І.А. // дисертація. – Київ: Інститут математики НАН України, 2018. – 161 с.

4. Faltinsen O.M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O.M. Faltinsen, O.F. Rognbakke, A.N. Timokha.

Реут Віктор Всеволодович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
 e-mail: reut@onu.edu.ua;
 Молоканов Юрій Вікторович, студ. 4 курсу, факультет математики, фізики і інформаційних технологій,
 Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
 e-mail: molokanov9@gmail.com

ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕННЫЙ СТАН ДЛЯ СМУГИ, ЩО ОСЛАБЛЕНА ТРІЩИНОЮ

Реут В.В., Молоканов Ю.В.

Розглядається плоска задача теорії пружності для смуги $\{-a < x < b, |y| < \infty\}$, обидві межі якої знаходяться у стані закладання, що ковзає (чи затискається). Усередині смуги вздовж відрізка $\{x = 0, -1 < y < 1\}$ є тріщина. Задані об'ємні сили. Припускається, що контакт берегів тріщини відсутній.

Показано, що розв'язок плоскої задачі для смуги у випадку фінітного (по y) навантаження у класі функцій (переміщень та напруг), спадаючих на нескінченності, можна звести до системи рівнянь

$$\begin{cases} \Delta^2 \sigma_x = -\Delta X' + (1+\nu)X'' - [\Delta Y' - (1+\nu)Y'']; & -a < x < b, -\infty < y < \infty, \\ \tau_{xy} = -\sigma'_x - X; & \sigma_y = -\sigma''_x + X' - Y'; & Ev = [\Delta \sigma_x + (1+\nu)\sigma'_x] + X' - Y'; \\ Eu = -[\Delta \sigma_x + (1+\nu)\sigma'_x] + X' - [\Delta X' + 2(1+\nu)X''] + Y'. \end{cases} \quad (1)$$

Тут штрихом позначено похідну за змінною x , а крапкою – похідну за змінною y ; u , v – переміщення; σ_x , σ_y , τ_{xy} – напруження. Це дозволяє засотувати інтегральне перетворення за змінною y .

Зокрема, у поставленій задачі інтегральне перетворення Фур'є дозволяє звести проблему до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь на скінченному інтервалі виду

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \chi(y) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta - \int_{-1}^1 \chi(y) K_{11}(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \mu(\eta) K_{12}(y, \eta) d\eta = p(y), & |y| < 1, \\ \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \mu(y) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta - \int_{-1}^1 \chi(y) K_{21}(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \mu(\eta) K_{22}(y, \eta) d\eta = t(y), & |y| < 1, \end{cases} \quad (2)$$

де $K_{ij}(y, \eta)$ – нескінченно-диференційовні функції, а $\chi(y)$ та $\mu(y)$ – відповідні стрибки нормальних та дотичних переміщень при переході через тріщину.

Розв'язок цієї системи будувався методом ортогональних многочленів за допомогою розкладення шуканих функцій у ряд за многочленами Чебишева другого роду. В результаті отримана нескінченна система лінійних алгебраїчних многочленів типу Пуанкаре – Коха коефіцієнтів розкладення, що допускає застосування методу редукції.

Було розраховано значення коефіцієнта інтенсивності нормальних зусиль (КІН). На графіку (рис. 1) показано залежність КІН K від величини параметра b за умов $a = b$. З нього випливає, що зі збільшенням параметра b значення КІН наближається до значення КІН для нескінченної площини.

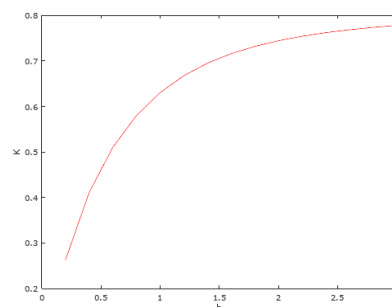


Рисунок 1 – Залежність КІН K від параметра b за умов $a = b$

РОЗРАХУНОК МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ТІЛ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН ІЗ ПРЯМОКУТНИМ ОТВОРОМ

Ревенко В.П.

Розглянуто пластину сталої товщини h , серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$, де $\Pi_1 = \{(x, y) \in [-a_1, a_1] \times [-b_1, b_1]\}$ – прямокутний отвір. В [1] встановлено, щоб одночасного задовольнити рядами Фур'є крайові умови на контурах Π , Π_1 , двозв'язну поверхню пластини потрібно умовно розділити на прямокутні області. Для цього проведено із кутів отвору уявні розрізи паралельні осям координат, на яких виконуються умови ідеального контакту. Показано, що якщо використати функцію напружень $\Phi = E(y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x})$, то переміщення матимуть такий вигляд:

$$u = (1 + \nu) \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = (1 - \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (1 + \nu) \left[y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right], \quad (1)$$

де φ , ψ – гармонічні функції переміщень. Якщо розтягувати пластину однорідними навантаженнями вздовж осі Oy , то внаслідок симетрії задачі достатньо розглянути перший квадрант, в якому буде два уявних розрізи, що виділяють три прямокутні області.

Відзначено, що збурений (самозрівноважений) напружений стан швидко зникає при віддаленні від контуру Π_1 . Покладено $a, b \gg a_1, b_1$, так щоб збуреним станом на контурі Π можна було знехтувати. Записано загальну кількість крайових і умов спряження для визначення збуреного стану [1]: на контурі Π умови задовольняються; на контурі Π_1 маємо чотири рівняння; на уявних розрізах – вісім рівнянь. Використано подання переміщень (1), напружень [1], і всі рівняння записано в компактному вигляді

$$\sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) = P_m, \quad \gamma_m \in [\beta_m, \alpha_m], \quad m = \overline{1, K}, \quad (2)$$

де $M = 12N$, $K = 12$, N – кількість гармонік розкладу функцій $\varphi_{j,n}$, $\psi_{j,n}$, $j = \overline{1, 3}$, $n = \overline{1, 2}$.

Використано методику [1] і зведено задоволення системи 12-ти рівнянь (2) до пошуку мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\Omega_N \{c_1, \dots, c_M\} = \sum_{m=1}^K \left\| \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2. \quad (3)$$

Форма (3) не є лінійною, але, якщо її мінімум при зростанні N прямує до нуля, то його значення служить оцінкою точності розв'язку. Узагальнено відомий метод Фур'є для одного рівняння на випадок розв'язку системи рівнянь із неортогональними функціями. Встановлено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

1.Ревенко В.П. Визначення розподілу напружень у двох з'єднаних між собою прямокутних пластинах / В. П. Ревенко // Вісник Тернопільського національного техн. ун-ту. – 2014. – № 4 (76). – С. 70–79.

Рево Сергій Лукич, доктор фіз.-мат. наук, завідувач НДЛ «Фізика металів та кераміки»,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: s_revo@i.ua ;
Мельниченко Микола Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, ст.наук.співробітник,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua;
Авраменко Тетяна Григорівна, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: tetianavramenko@gmail.com;
Андрущенко Володимир Олександрович, провідний інженер,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: andron@univ.kiev.ua ;
Іваненко Катерина Олексіївна, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ivanenko@univ.kiev.ua

МІКРОТВЕРДІСТЬ КОМПАКТОВАНОГО ТЕРМІЧНО РОЗШИРЕНОГО ГРАФІТУ

Рево С.Л., Мельниченко М.М., Авраменко Т.Г., Андрущенко В.О., Іваненко К.О.

На сьогодні поряд з металами, їх сплавами, полімерами та керамікою активно і всебічно вивчаються різні алотропні модифікації вуглецевих наноматеріалів. Одним з перспективних представників нановуглецевих матеріалів є термічно розширений графіт (ТРГ). Цей матеріал зберігає ряд фізико-хімічних властивостей графіту і завдяки розгалуженій наноструктурній морфології частинок проявляє гарну здатність до компактування при пресуванні, що дозволяє використовувати ТРГ у якості сировини для отримання інших нанорозмірних форм вуглецю, наповнювача нанокомпозиційних матеріалів, адсорбенту органічних сполук, альтернативного прекурсору для отримання суперконденсаторів та ін. При розробці нових матеріалів на базі ТРГ та вдосконаленні технологій їх обробки важливо контролювати фізико-механічні властивості їх поверхні. Сучасні стандартні методи механічних випробувань (на розтяг, стиснення, згин) не завжди допомагають отримати механічні характеристики таких матеріалів, що пов'язано з малим розміром зразків, а також їх недостатньою пластичністю при кімнатній температурі. Як правило, для визначення фізико-механічних властивостей крихких та малопластичних матеріалів широко використовуються різні методи індентування.

Використовуючи метод неперервного мікроіндентування в даній роботі було визначено особливості впливу дисперсності та морфології частинок ТРГ на поверхневий розподіл мікротвердості компактованих зразків. Морфологію та мікроструктуру порошків ТРГ вивчали за допомогою скануючого електронного мікроскопа. Мікротвердість досліджуваних матеріалів визначали при кімнатній температурі за допомогою мікроіндентометра Мікрон-Гамма. В роботі було проаналізовано і узагальнено результати мікроіндентування компактованих зразків ТРГ при навантаженні від 20г до 80г (при цьому кожна серія уколів складалася із 15 послідовних занурень індентора з кроком 50 мкм). Для аналізу розподілу мікротвердості на поверхні компактованих зразків ТРГ поверхню кожного зразка умовно розділяли на 3 рівні частини і проводили вимірювання в межах концентричних кіл з відповідними радіусами $1/4R$, $1/2R$ та $3/4R$, де R – радіус зразка. При переміщенні індентора за часовою стрілкою фіксували зміну кутової координати (азимуту) та визначали мікротвердість зразків.

Запропонований підхід аналізу мікротвердості поверхні компактованих зразків ТРГ дає можливість характеризувати мікромеханічні властивості досліджуваних зразків та оптимізувати технологічні режими їх одержання з метою забезпечення кращої конструктивної міцності деталей в цілому.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Резник В.С.

Рассматривается задача определения параметров ядер наследственности нелинейно вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, для которых связь между компонентами тензоров напряжения, деформации и временем, исходя из гипотезы пропорциональности девиаторов, задается системой уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} \cdot (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); & (i, j = \overline{1,3}) \\ \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(t); t)}{\varepsilon_i(t)} \cdot \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right); & (i, j = \overline{1,3}), \end{cases} \quad (1)$$

где ε_{ij} – тензор деформаций, σ_{ij} – тензор напряжений, $\varepsilon_v(\cdot)$ и $\varepsilon_i(\cdot)$ – объемная деформация и интенсивность тензора деформаций; $\sigma_0(t)$ и $\sigma_i(t)$ – первый инвариант и интенсивность тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера.

Физические свойства материала представлены нелинейной зависимостью типа Работнова [1]. В этом случае функции $\varepsilon_v(\cdot)$, $\varepsilon_i(\cdot)$, $\sigma_0(t)$ и $\sigma_i(t)$ задаются соотношениями

$$\begin{cases} \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_i(\cdot)$ и $\varphi_v(\cdot)$ – функции, задающие нелинейность интенсивности ползучести и объемной ползучести; $K_i(\cdot)$ и $K_v(\cdot)$ – ядра нелинейности интенсивности ползучести и объемной ползучести; λ_i , λ_v – реологические параметры. Между ядрами ползучести и релаксации существует интегральная связь, которая позволяет по ядрам ползучести идентифицировать ядра релаксации. В связи с этим далее решение задачи строится по ядрам ползучести.

Решения поставленной задачи строятся с использованием двух подходов. В первом подходе устанавливается зависимость между ядрами интенсивности ползучести $K_i(\cdot)$ и объемной ползучести $K_v(\cdot)$ с ядрами продольной $K_{11}(\cdot)$ и поперечной ползучести $K_{22}(\cdot)$, найденными при одноосном растяжении. Во втором подходе – с ядрами продольной $K_{11}(\cdot)$ и сдвиговой ползучести $K_{12}(\cdot)$, найденными при одноосном растяжении и чистом кручении [2].

1. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members / Y.N. Rabotnov. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company. – 1969. – 822 p.
2. Golub V.P. Identification of the hereditary kernels of isotropic linear-viscoelastic materials in combined stress state. 2. Proportional deviators / V.P. Golub, B.P. Maslov, P.V. Fernati // Inter. Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52. – N8. – P. 648-660.

Романов Олександр Веніамінович, кандидат техн. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна;
Фернаті Павло Вікторович, кандидат техн. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна;
e-mail: pavel147223@gmail.com

ДО ПИТАННЯ ВРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ТРЕТЬОГО ІНВАРІАНТУ ДЕВІАТОРА НАПРУЖЕНЬ НА ПРОЦЕС ДОВГОТРИВАЛОГО ДЕФОРМУВАННЯ НЕЛІНІЙНО- В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Романов О.В., Фернаті П.В.

В роботі досліджується процес довготривалого деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. В якості об'єкту дослідження розглядається процес повзучості тонкостінних трубчатих зразків з поліетилену високої щільності ПЕВП [1], та поліетилену низького тиску [2] за умов комбінованого навантаження – розтягом із скрученням, що викликає в матеріалі плоский напружений стан. Визначальні рівняння розрахунку деформацій повзучості для простих і близьких до простих режимів навантаження з деформуванням по траєкторії малої кривизни будуються виходячи з тензорно-лінійного зв'язку між тензорами напружень та деформацій у вигляді пропорційності їх девіаторів:

$$e_{ij}(t) = \lambda [J_2(D_\sigma(t)), J_3(D_\sigma(t))] s_{ij}(t). \quad (1)$$

Вплив третього інваріанту девіатора напружень враховується за допомогою функції кута виду напруженого стану $\gamma(\psi_\sigma)$, в якій параметр кута виду напруженого стану ψ_σ розглядається згідно до [3] у формі

$$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{27J_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3}. \quad (2)$$

В цій інтерпретації одновісному розтягу відповідає $\psi_\sigma = 0$, одновісному стиску $\psi_\sigma = \pi/3$, а чистому скрученню $\psi_\sigma = \pi/6$.

Визначення залежностей функції $\gamma(\psi_\sigma)$ від ψ_σ здійснюється на основі аналізу експериментальних даних, що отримані з базових дослідів на одновісний розтяг - $\bar{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ та чисте скручення - $\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ за формулою

$$\gamma(\psi_\sigma) = 1 - 6\psi_\sigma \{ [1 - \tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t) / \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)] \} / \pi, \quad (3)$$

Ця функція використовується у фізичному законі $\varepsilon_i[\sigma_i, t, \gamma(\psi_\sigma)]$ при розрахунках деформації повзучості для заданого напруженого стану з відповідним кутом виду напруженого стану (2).

Отримані рівняння перевірені шляхом розрахунку деформацій повзучості досліджених матеріалів за умов комбінованого навантаження. Встановлено, що даний підхід дозволяє якісно і кількісно поліпшити результати розрахунків.

1. Креггерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

2. Васьков Б. С. Некоторые вопросы ползучести полиэтиленовых труб // Прочность материалов и конструкций. Труды ЛПИ. № 278. – Ленинград: Машиностроение, 1967. – С. 13-19.

3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение. – 1975. – 400 с.

Розумнюк Вячеслав Іванович, кандидат фіз.-мат., с.н.с
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: rvi@univ.kiev.ua

ПРО ЗАГАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА І НАВ'Є-СТОКСА

Розумнюк В. І.

Побудова загального розв'язку рівняння Нав'є-Стокса є фундаментальною проблемою сучасної механіки рідини і математики через нелінійність, що виникає при переході від змінних Лагранжа до змінних Ейлера.

Запропоновано нову процедуру такого переходу без появи нелінійних членів у рівнянні, що дозволяє побудувати його загальний розв'язок.

Показано, що рівняння Нав'є-Стокса є еліптично-параболічним, і його загальний розв'язок є сумою загальних розв'язків рівняння Лапласа для поступальної швидкості руху рідини та рівняння дифузії для вихрової компоненти. Існування, єдиність і гладкість загального розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса і Ейлера вирішуються за допомогою дослідження добре вивчених рівнянь Лапласа і дифузії.

TO EVOLUTION OF SOLITARY WAVES: COMPARISON OF TWO APPROXIMATE APPROACHES

The plane waves are considered within the framework of nonlinear five-constant Murnaghan model. Choose the longitudinal type waves and then their evolution can be described by the nonlinear wave equation [1]

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,1} u_{1,1}.$$

This equation was analyzed by different approximate approaches (methods) among of them the method of successive approximations is the most often used one. It works quite well for harmonic waves. But some troubles arise in the case of solitary waves profiles of which are differing from the exponential profile. According to the method, the zero approximation is chosen as solution of corresponding linear wave equation $u_{1,tt}^{(0)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(0)} = 0$. The first approximation is found as solution of inhomogeneous linear wave equation $u_{1,tt}^{(1)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(1)} = (N_1/\rho) u_{1,1}^{(0)} u_{1,1}^{(0)}$. It is assumed usually that the solitary wave with the initial profile $F(ax_1)$ is propagated with the profile $u(x_1, t) = F[a(x_1 - v_L t)]$ depending on the phase variable $\sigma = a(x_1 - v_L t)$. In this case, the second approximation has to be evaluated as the solution of inhomogeneous linear wave equation

$$u_{1,tt}^{(1)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(1)} = a^3 (N_1/\rho) F''[a(x_1 - v_L t)] F'[a(x_1 - v_L t)].$$

Just the second approximation introduces the changes into the initial profile and describes the evolution. For harmonic waves ($F(x) = e^{ix}$), the right side part of last equation can be easily evaluated through the exponents and finding the corresponding solution is also easy. But for more complicate forms of F (for example, Whittaker functions) an evaluation of solution becomes problematic.

These troubles can be avoided by using another method based on restrictions on displacement gradient. The basic nonlinear equation is rewritten in the form $u_{1,tt} - (v_L)^2 [1 + \alpha u_{1,1}] u_{1,11} = 0$. A corresponding solution is found in the form $u(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)]$, where $v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$, v is the wave velocity, $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$. Further, with condition $|\alpha u_{1,1}| \ll 1$ the first two approximations of solution can be written as $u_1(x_1, t) \approx F[a(x_1 - v_L t - (1/2)\alpha v_L u_{1,1} t)]$. This solution in turn is expanded into the Taylor series around the classical constant value and small parameter $\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t$. Finally, the approximate solution can be represented in the form

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) a [\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2$$

under condition $|\delta| = |(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t| \ll 1$. Because the smallness of $|\alpha u_{1,1}|$ is already assumed, then this condition is some restriction on $a v_L t$. Let the engineering materials are considered. Then the passed by wave distance must be about 1 – 10 meters and the characteristic size of wave (wave bottom length) must be essentially less of this distance.

The features of comparison of two presented methods are discussed and commented.

1. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of Engineering Mechanics. Heidelberg: Springer. - 2014.- 454 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00464-8

TO EVOLUTION OF SOLITARY LONGITUDINAL AND TRANSVERSE PLANE WAVES PROPAGATING IN NONLINEARLY ELASTIC MATERIAL

The presented results are related to an approach to analysis of elastic plane waves in materials deforming nonlinearly within description of nonlinearity by the classical Murnaghan potential [1]. A starting wave equation for the longitudinal plane wave (P-wave) is the quadratically nonlinear one

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (1)$$

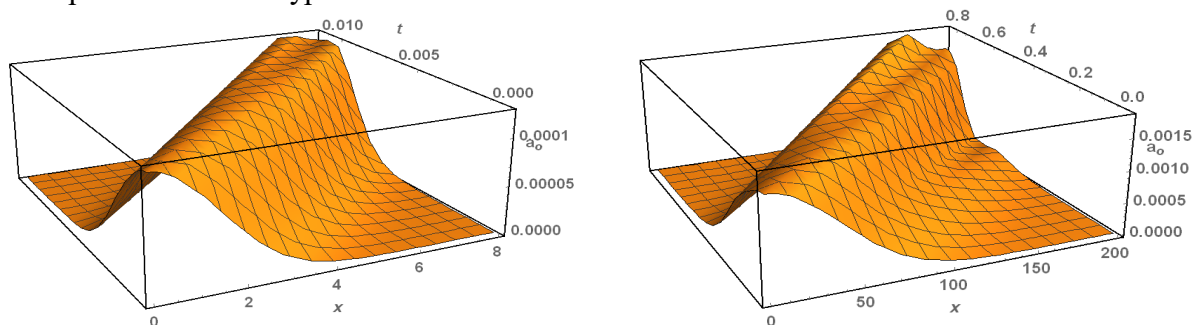
where $N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$, ρ is density, u_k are displacements; λ , μ , A , B , C are elastic constants of Murnaghan model, $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ is velocity of linear P- wave. A starting nonlinear wave equation for the transverse plane wave (S-wave) is the cubically nonlinear one

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2, \rightarrow u_{3,tt} - (c_T)^2 u_{3,11} = (N_4/\rho) u_{3,11} (u_{3,1})^2, \quad (2)$$

where $N_4 = (1/2)[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C]$ $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ is velocity of linear S- wave.

Thus, the statement of problem on evolution of P- and S- waves is different – equation (1) is quadratically nonlinear, whereas equation (2) is the cubically nonlinear one. The corresponding problems were solved and commented well for the harmonic waves [1]. But transition to solitary type waves introduces some complications and therefore is still analyzed.

A fragment of such analysis is proposed for solitary waves in the form of known functions. In particular, for the waves with initial profile in the form of Gauss function (bell-function). The figures below (left picture - P-wave, right picture - S-wave) show that evolution depends essentially on the wave phase and wave type.



In the case of P-wave, the initially symmetric profile is deformed symmetrically and the middle part of bell is extended – it as if “grows stout”, saving the bottom unchanging. In the case of S-wave, the initially symmetric profile is deformed asymmetrically – the right part of bell is extended (“grows stout”), whereas the left part is narrowed (“grows thin”).

1. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of Engineering Mechanics. Heidelberg: Springer. - 2014.- 454 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00464-8
2. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials // Int. App. Mech. – 2016. – vol. 52, No 3. – P.282 – 289.
3. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. App. Mech. – 2017. – vol. 53, No 1. – P.104 – 110.

Samoilenko Valerii Hrygorovych, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: valsamyul@gmail.com;
 Samoilenko Yuliia Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: yusam@univ.kiev.ua;
 Vovk Vitalii Sergiyovych, Ph.D. student,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: vovkvitali@gmail.com.

ASYMPTOTIC ANALYSIS TO THE SINGULARLY PERTURBED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I., Vovk V.S.

The Korteweg-de Vries equation [1] is used as a mathematical model of different processes in hydrodynamics, plasma physics, biology, optic, telecommunication, etc. Due to studying properties of the equation there was created a new approach of mathematical physics that is named by inverse scattering transform [2]. The technique was successfully used for finding various solutions to a number of nonlinear partial differential equations, in particular, to the nonlinear Schrodinger equation, the sine-Gordon equation, the modified Korteweg-de Vries equation, the Kadomtsev-Petviashvili equation and many others.

We consider the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon) u_t + b(x, t, \varepsilon) u u_x, \quad (1)$$

where

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) \varepsilon^k, \quad b(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, t) \varepsilon^k$$

and $a_k(x, t), b_k(x, t) \in C^\infty(R \times [0; T])$, $k \geq 0$, ε is a small parameter.

Through nonlinear WKB method [3, 4] we construct asymptotic soliton-like solutions [5, 6] to (1). They contain regular and singular parts. While the regular part presents background of the wave solution, the singular part describes soliton properties of the one.

We analyze the asymptotic soliton-like solutions to equation (1) depending on small parameter under various its coefficients. We also compare exact, numerical and the asymptotic soliton-like solutions to equation (1) in particular cases.

1. Korteweg D.J. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // *Philos. Mag.* – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.

2. Gardner C.S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura // *Physical Review Lett.* – 1967. – V. 19. – P. 1095 – 1097.

3. Samoilenko V. Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // *Ukrainian Mathematical Journal.* – 2005. – V. 57, № 1. – P. 132 – 148.

4. Samoilenko V. Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // *Ukrainian Mathematical Journal.* – 2007. – V. 59, № 1. – P. 126 – 139.

5. Maslov V.P. Geometric asymptotics for PDE. I / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. Providence: American Mathematical Society, 2001. – 243 p.

6. Miura R.M. Application of non-linear WKB-method to the KdV equation / Miura R.M., Kruskal M. // *SIAM J. Appl. Math.* – 1974. – V. 26, № 3. – P. 376 – 395.

Савельєва Катерина Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: katerina1971s@gmail.com;

Дашко Ольга Геннадіївна, кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
e-mail: olga.dashko@gmail.com;

Симчук Ярослав Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

ПЛОСКІ ХВИЛІ В НАНОКОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ

Савельєва К.В., Дашко О.Г., Симчук Я.В.

Предметом публікації є аналіз результатів теоретичного дослідження взаємодії плоских кубічно нелінійних гармонічних хвиль в нанокompозитних матеріалах. Нелінійні властивості матеріалів моделюються пружним потенціалом Мурнагана, в якому враховуються нелінійності, до четвертого порядку включно, відносно компонентів градієнта деформації [1,2]. Вектор переміщень залежить від однієї просторової змінної x та часу t . Нелінійні хвильові рівняння для поперечних, горизонтально та вертикально поляризованих хвиль мають вигляд:

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} = N_4 u_{2,xx} (u_{2,x})^2 + N_6 u_{2,xx} (u_{3,x})^2; \quad (1)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} = N_4 u_{3,xx} (u_{3,x})^2 + N_6 u_{3,xx} (u_{2,x})^2. \quad (2)$$

При цьому поздовжні переміщення $u_1(x,t)$ не враховуються.

Результати дослідження хвиль отримані шляхом використання двох різних методів.

Перший - метод повільно змінних амплітуд, - використовується для дослідження взаємодії поперечної хвилі однієї, горизонтальної (рівняння (2)), або вертикальної (рівняння (3)) поляризації. Другий доданок правої частини відповідного рівняння, тобто взаємодія хвиль різної поляризації, не враховується. За цим методом проаналізований механізм генерації своєї третьої гармоніки поперечною вертикально поляризованою хвилею. Метод передбачає послідовну побудову вкороченого рівняння, еволюційних, при умові виконання умови частотного синхронізму, рівнянь та співвідношень Менлі-Рова. Графічний аналіз останніх дає можливість стверджувати, що при одночасному збудженні потужної хвилі накачки та слабкої сигнальної хвилі відбувається міжхвильове перепомповування енергії і, в результаті, перемикання кубічно нелінійної поперечної хвилі з основної (ω) на потрійну (3ω) частоту.

Другий - метод збурень, - використовується для дослідження одночасного поширення двох поперечних хвиль різної поляризації. При цьому відбувається спотворення профілів цих хвиль. Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації відбувається перепомповування енергії з потужної хвилі в слабку [3].

Основним явищем, виявленим за допомогою обох методів, є перемикання хвильового процесу з основної на потрійну частоту кубічно нелінійних поперечних хвиль, як для однаково поляризованих хвиль, так і для поперечних хвиль різної поляризації.

1. Руцицький Я. Я. Цурпал С. І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою / Я. Я. Руцицький, С. І. Цурпал – Київ.: Інст.механіки ім. С. П. Тимошенка. – 1998. – 377 с.
2. Гузь А.Н. Введение в механику нанокompозитов /А.Н. Гузь , Я.Я. Руцицкий , И.А. Гузь. – К.: Академперіодика. – 2010. – 398 с.
3. Савельєва К.В. О взаимодействии поперечных плоских волн в нанокompозитных материалах / К.В. Савельєва // Прикл.механика. –2015. – 51, №6. – С.72-79.

Селіванов Михайло Федорович, провідний науковий співробітник, докт. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна;
e-mail: mfs@ukr.net
Чорноіван Юрій Олексійович, старший науковий співробітник, канд. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна;
e-mail: yurchor@ukr.net

РОЗКРИТТЯ КРАЙОВОЇ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В ІЗОТРОПНІЙ ПІВПЛОЩИНІ ІЗ ВРАХУВАННЯМ НАЯВНОСТІ ЗОНИ ЗЧЕПЛЕННЯ У ВЕРШИНІ

Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.

Розв'язанню задачі про крайову тріщину Дагдейла у півнескінченній площині (рис. 1) присвячено доволі значну кількість публікацій, посилання на які можна, зокрема, знайти у роботах [1, 2]. Різними авторами приділено увагу визначенню довжини зони зчеплення, яка є внутрішнім параметром моделі.

Через складність застосування аналітичних схем досі невивченим лишалось питання щодо аналізу критичного стану крайової тріщини нормального відриву за умови використання перспективної моделі зони зчеплення, яка надає змогу точніше врахувати складну нелінійну поведінку матеріалів в околі вершини тріщин. З метою вивчення характеру розподілу напружень у зоні зчеплення за відомого закону зв'язку зчеплення з відривом та визначення розкриття тріщини було розроблено числово-аналітичну методику розв'язання задач механіки тріщин в рамках моделі зони зчеплення. Основні елементи цієї методики було запропоновано у роботі [3] для випадку тріщин у нескінченній ізотропній площині.

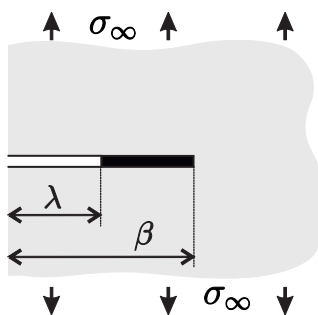


Рис. 1

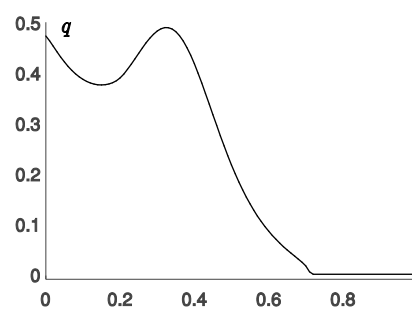


Рис. 2

Сингулярне рівняння з узагальненим ядром Коші, що дає розв'язок задачі, розв'язано як без використання регуляризації, так із її використанням. Розв'язування виконувалося колокаційним методом, який уможливорює врахування зв'язаності зчеплення та відриву. Розроблений алгоритм розв'язування задачі також враховує умову плавності змикання берегів тріщини. Побудовано числові приклади в умовах граничного стану для степеневого закону зчеплення-відриву з ділянкою зміцнення (характерний вигляд графіка безрозмірної щільності розкриття представлено на рис. 2). Встановлено, що регуляризація при розв'язанні задачі практично не впливає на значення критичного навантаження.

1. Ferdjani H., Abdelmoula R. Propagation of a Dugdale crack at the edge of a half plane // Continuum Mech. Thermodyn. – 2017, 30. – P. 195–205.
2. Wang S., Dempsey J.P. A cohesive edge crack // Eng. Fract. Mech. – 2011, 78. – P. 1353–1373.
3. Selivanov M.F., Chornoivan Yu.O. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications // Int. J. Fract. – 2018, 212. – P. 113–121.

Сенченков Игорь Константинович, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
 Институт механики им. С.П.Тимошенко, Киев, Украина,
 e-mail: term@inmech.kiev.ua;
 Червинко Ольга Петровна, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
 Институт механики им. С.П.Тимошенко, Киев, Украина.

РАСЧЕТ НДС ПОЛОГО СЛОИСТОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ ПО ВНЕШНЕЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Сенченков И.К., Червинко О.П.

Расчет конструкций ракетных твердотопливных двигателей (РДТТ) с учетом динамических эффектов представляет практический интерес [1, 2]. В упрощенных схемах предполагается, что материал цилиндра несжимаемый, а импульс давления на внешней или внутренней поверхности цилиндра изменяется ступенчатым образом. В реальных условиях материал топлива является сжимаемым, а давление в канале или на поверхности корпуса нарастает в течение некоторого характерного времени t_p

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -p_0 t / t_p, & 0 < t < t_p \\ -p_0, & t \geq t_p \end{cases}$$

В настоящей работе для реальных материалов РДТТ [3] рассмотрено влияние временного параметра t_p на максимальное значение напряжения σ_{rr} на границе топливо-оболочка (корпус). Задача решается методом конечных элементов с использованием метода Шепери сведения вязкоупругой задачи к упругой с переменными модулями.

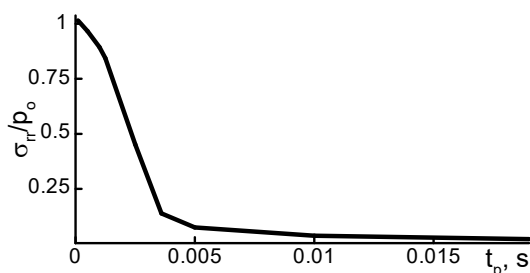


Рис.1

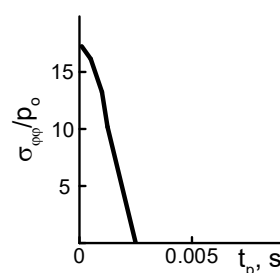


Рис.2

На рис. 1 показана зависимость максимального радиального (отрывного) напряжения σ_{rr} на границе топливо-корпус от времени t_p нарастания давления, действующего на внешней поверхности цилиндра. Видно, что чем выше скорость нарастания давления, тем больше возможность отрыва топлива от корпуса РДТТ, причем $\max \sigma_{rr} \approx p_0$. Аналогична зависимость растягивающих окружных напряжений $\sigma_{\phi\phi}$ в корпусе (рис. 2), причем условие $\sigma_{\phi\phi} > 0$ реализуется в переходном динамическом процессе при $t_p \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

1. Ахенбах Г.Д. (Achenbach) Динамическое поведение длинного скрепленного с корпусом вязкоупругого цилиндра // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 4. – С. 124 – 129.
2. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. Применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. – М.: Наука, 1972. – 328 с.
3. Renganahan K. Slump Estimation of Cylindrical Segment Grains of a Typical Rocket Motor under Vertical Storage Conditions / K.Renganahan, Rao B.Nageswara, M.K.Jana // Trends in Applied Sciences Research. – 2006. – 1(1). – P.97 – 104.

Середницька Христина Ігорівна, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
 e-mail: ser.kristina@gmail.com
 Мартиняк Ростислав Михайлович, доктор фіз.-мат. наук,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
 e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

ТЕРМОПРУЖНА ПОВЕДІНКА БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНОЮ ЩІЛИНОЮ, ЗАПОВНЕНОЮ НЕСТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ

Середницька Х.І., Мартиняк Р.М.

Досліджується термонапружений стан біматеріальної площини з міжфазною щілиною (тріщиною), заповненою теплопровідною нестисливою рідиною. Компоненти біматеріалу характеризуються різними коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2) і модулями зсуву (G_1, G_2), такими, що параметр Дандерса β біматеріалу дорівнює нулю $\left(\beta \equiv \frac{1-2\nu_1}{G_1} = \frac{1-2\nu_2}{G_2} = 0 \right)$.

Розташована на межі з'єднання півплощин щілина, що має довжину $2a$ і початкову висоту $h_0(x)$, заповнена нестисливою рідиною з коефіцієнтом теплопровідності λ_f . На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене стискальне навантаження p та стаціонарний однорідний тепловий потік q , перпендикулярні до міжфазної лінії.

Використовуючи подану у праці [1] методику, сформульовану задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілини $h(x)$ та стрибка температури між її берегами $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) = -\frac{1}{2G^*} (-p + P_f) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_0(t)}{t-x} dt, \quad |x| < a, \quad h(\pm a) = 0; \quad (1)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \quad \gamma(\pm a) = 0; \quad (2)$$

де P_f – тиск рідини; $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}$, $G^* = \frac{G_1(1-\kappa_2)}{(1-\kappa_1\kappa_2)}$, $\kappa_n = 3-4\nu_n$, $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$, $\eta_1 = \frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{\lambda_1}$,

$\eta_2 = \frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{\lambda_2}$ – термічні дистортивності матеріалів півплощин.

Тиск рідини P_f визначаємо з умови нестисливості рідини:

$$\int_{-a}^a h(x) dx = \int_{-a}^a h_0(x) dx. \quad (3)$$

Систему (1), (2) з врахуванням умови (3) розв'язано числово, використовуючи метод послідовних наближень. На основі отриманого розв'язку проаналізовано залежність тиску рідини, розкриття щілини і коефіцієнтів інтенсивності міжфазних напружень від прикладеного навантаження.

1. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Середницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

STUDIES OF THE SPECTRAL PROBLEM ON NATURAL LIQUID SLOSHING IN A TOROIDAL TANK

Solodun A.V.

In the paper, evolutionary boundary value problem of linear liquid sloshing in a fixed toroidal tank is considered. Emphasis placed on finding natural liquid sloshing frequencies and modes. The problem reduces to the spectral boundary problem [1]

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{in } Q_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \varphi \quad \text{on } \Sigma_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } S_0, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS = 0, \quad (1)$$

in which the spectral parameter appears on parts of the boundary. The spectral boundary problem is solved by employing a variational method, which utilizes the Ritz–Treftz projective scheme. As the functional base we adopt the so-called harmonical polynomials. Idea of using those base functions belongs to Lukovsky [1], who illustrated the corresponding variational scheme for a series of tank shapes, however, his publications as well as works of his co-worker never considered toroidal liquid domain. According to Ritz–Treftz scheme for the toroidal case, the solution of (1) should be posed as

$$\varphi_{mn}(x, \xi, \theta) = \left[\sum_{k=1}^q a_k^{(n)} w_k^{(m)}(x, \xi) + \sum_{k=1}^q a_k^{*(n)} w_k^{*(m)}(x, \xi) \right] \cos m\theta, \quad (2)$$

where the first set of the base functions, $w_k^{(m)}(x, \xi)$ is smooth everywhere in the (x, ξ) -plane, but $w_k^{*(m)}(x, \xi)$ possesses a singular behavior on $\xi \rightarrow 0$. Finally, these functions can be defined as

$$w_k^{(m)} = b_{mk} R^k P_k^{(m)}(\cos \eta), \quad w_k^{*(m)} = b_{mk} R^k Q_k^{(m)}(\cos \eta), \quad (3)$$

where $b_{mk} = 2^m (k-m)! / (k+m)!$, $R = \sqrt{x^2 + \xi^2}$, $\cos \eta = x/R$, and $P_k^{(m)}$ are the associated Legendre functions of the first kind and $Q_k^{(m)}$ are the associated Legendre functions of the second kind. Solution (2) analytically satisfy the Laplace equation in the toroidal domain of a triangular cross section (coaxial conical cavity [2]), as well as the trapezoidal cross section (coaxial truncated conical cavity [3]).

The results will be used for further development of nonlinear modal theory for the case of toroidal tanks with spherical cross section.

1. Луковский И.А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. / И.А. Луковский, М.Я. Барняк, А.Н. Комаренко – Киев: Наукова думка, 1984. – 212 с.

2. Луковский И.А. Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах. / И.А. Луковский, А.В. Солодун // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. 2013. Т. 10, № 3. – С. 88–112.

3. Солодун А.В. Собственные колебания жидкости в усечённых соосных конических баках. / А.В. Солодун // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. 2018. Т. 15, № 1. – С. 70–97.

Тарасов Андрій Павлович, аспірант, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: angrybeaver315@gmail.com

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
e-mail: y.zhuk@i.ua

Киричок Іван Федорович, доктор фіз.-мат. наук, пров.наук. співр.,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ України, Київ, Україна,

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ГНУЧКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОАКТИВНИМИ ШАРАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ ЗСУВІВ

Для зниження рівня амплітуд коливань тонкостінних елементів конструкцій (балок, пластин і оболонок) широко використовують розподілені актуатори і сенсори, які, як правило, виготовляють з п'єзоактивних матеріалів. Для активного гасіння вимушених коливань широко використовується спосіб нанесення на зовнішні поверхні тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів, до електродів яких подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази, для нейтралізації дії механічного збудження. Через те, що у багатьох випадках тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями знаходяться під дією інтенсивних циклічних навантажень (які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву), необхідно враховувати ефекти фізичної і геометричної нелінійностей, а також їх вплив на термомеханічний стан конструкції. Побудова електромеханічних моделей динамічної поведінки тонкостінних шаруватих елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів, що враховують фізичну і геометричну нелінійність, містяться у працях [1,2,3].

Повне врахування факторів, які можуть суттєво вплинути на термомеханічний стан шаруватих елементів конструкцій, вимагає розробки уточнених теорій термоелектромеханічної поведінки конструкцій, в яких беруться до уваги деформації зсувів та інерція обертальних рухів. У даній роботі розвивається така уточнена модель зв'язаної термоелектромеханіки, в якій враховуються деформації поперечного зсуву, інерція повороту і геометрична нелінійність. Сформульовано постановку задачі про осесиметричні коливання і дисипативний розігрів гнучкої тришарової циліндричної кругової оболонки, середній шар якої є електрично пасивним, а зовнішні шари виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу. При цьому для описання стаціонарних коливань оболонки використовується концепція комплексних модулів. В такому випадку комплексні амплітуди основних польових електричних і механічних величин виявляються зв'язаними лінійними співвідношеннями (амплітудними рівняннями), які є аналогічними до співвідношень лінійної електропружності з тією відмінністю, що вони сформульовані відносно комплексних величин. Розглянуто випадки як ізотропного, так і трансверсально ізотропного в'язкопружного матеріалу середнього шару. Шари-актуатори вважаються виготовленими з п'єзокераміки з однаковими властивостями і товщиною поляризацією протилежних напрямків. Така конфігурація є найоптимальнішою для активного контролю вимушених коливань оболонки. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь відносно комплексних амплітуд і розроблено методику числового розв'язування задачі.

1. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
2. Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Радіальні коливання і вібророзігрів замкнутої сферичної оболонки з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та їх демпфування п'єзоелектричними сенсором і актуатором // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: Фізико-математичні науки. – 2016. – Вип. 1, – С.59–64.
3. Kirichok I.F. Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // International Applied Mechanics. - 2011. - Vol. 46, No. 8. - pp. 890–901.

Timokha Alexander, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Corresponding Member of NASU,
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
Centre of Excellence “Autonomous Marine Operations and Systems”, Norwegian University of Science and
Technology (NTNU), Trondheim, Norway,
 e-mail: atimokha@gmail.com, alexander.timokha@ntnu.no;
 Lahodzinskyi Oleksandr, PhD student,
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: lagodzinskyi@gmail.com

STEADY-STATE SLOSHING IN AN ORBITALLY-FORCED SQUARE-BASE TANK

Timokha A.N., Lahodzinskyi O.E.

The paper [1] constructed a weakly-nonlinear steady-state theory of resonant sloshing in a square base tank performing either longitudinal (along parallel walls) or diagonal harmonic excitations with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. The theory employs the Narimanov-Moiseev nonlinear modal equations, which remain applicable for arbitrary small-magnitude periodic sway/surge/pitch/roll tank excitations of the primary sloshing frequency. Recently, when analyzing the Narimanov-Moiseev type approximation of the steady-state resonant sloshing in an upright circular tank, [2] noted that the resonant steady-state sloshing due to the combined periodic sway/surge/pitch/roll tank forcing is, within to the highest-order terms, equivalent to sloshing occurring due to an orbital horizontal (elliptic) tank excitation; moreover, the highest-order asymptotic contribution does not influence the wave type and its stability. This note remains true for the square base tank and, as a consequence, one can return to the original extended task of [1] – classification of the steady-state sloshing regimes for arbitrary sway/surge/roll/pitch periodic resonant forcing by considering the horizontal translatory orbital tank motions as it was assumed, e.g., in [3].

We adopt the Narimanov-Moiseev asymptotic theory of resonant sloshing in a square base tank from [1] (which implicitly implies that (i) the forcing frequency of the periodic tank motion is close to the lowest natural sloshing frequency, (ii) the forcing amplitude is smaller than the tank length, (iii) the two lowest degenerated (Stokes) natural sloshing modes give a dominant asymptotic contribution, and (iv) the secondary resonance phenomena can be neglected) to analytically study the steady-state wave regimes occurring for the elliptic orbit tank motion. Using the Bubnov-Galerkin projective scheme, we derive a (secular) system of nonlinear algebraic equations, which couples four lowest-order amplitudes of the steady-state (periodic) solution of the Narimanov-Moiseev modal equations. The secular system may admit an analytical solution that makes it possible to study all possible steady-state waves and their stability *versus* input parameters of the mechanical system. An emphasis is placed on the swirling sloshing mode (progressive azimuthal wave) and the forcing frequency ranges where the mode is stable. Specifically, swirling may be co- and/or counter-directed to the orbital forcing direction. A parameter study is done and response curves are drawn for different positions of the forcing ellipse and ratios between the ellipse semi-axes.

1. Faltinsen O.M. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin / O.M. Faltinsen, O.F. Rognesbakke, A.N. Timokha // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – V. 487. – P. 1-42.
2. Raynovskyy I. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container / I. Raynovskyy, A. Timokha // *Fluid Dynamics Research*. – 2018. – V. 50.- Article ID 043302.
3. Zhang C. Second resonance of liquid sloshing in square-base tanks undergoing the circular orbit motion / C. Zhang, D. Ning, B. Teng // *European Journal of Fluid Mechanics / B Fluids*. – 2018. – V. 72. – P. 235-250.

Timokha Alexander, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Corresponding Member of NASU,
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
Centre of Excellence “Autonomous Marine Operations and Systems”, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim, Norway,
e-mail: atimokha@gmail.com, alexander.timokha@ntnu.no;
Tkachenko Eugene, PhD student,
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
e-mail: tkachenko45555@gmail.com

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR THE CAPILLARY CURVE PROBLEMS

Timokha A.N., Tkachenko E.M.

A complex shape of the liquid-gas capillary interface is consequence of the joint effect of surface tension, gravity and, as an option, other forces and loads associated, e.g., with electromagnetic and/or centripetal (if the liquid rotates together with container) forces. When the interface possesses a kind of symmetry, its shape can be determined by the so-called capillary curve. Most often, this happens for liquids in channels when the curve follows from intersection with the cross-section and for axisymmetric liquid-gas interfaces where, obviously, the curve is due to cross-section with the meridian plane. Getting the capillary curves implies solving a rather complicated two-point boundary problem for special systems of nonlinear ordinary differential equations equipped with integral constraints, which are associated with the volume conservation condition. To be adopted for the spectral boundary value problem on the natural sloshing modes describing relative surface waves, one should get analytical-approximate solutions of the capillary-curve problem in the C^4 -metrics. Because the ordinary differential equations are of the second order, constructing the required smooth semi-analytical solutions looks a non-trivial task. The presentation reports how to solve the task by using the Padé approximant [1] and Adomian decomposition [2] method.

Using the Padé approximant makes it possible to construct a rational semi-analytical approximate capillary curves, which uniformly converge in a neighbourhood of the symmetry point, so that the original two-point boundary problem with constraints reduces to solving a transcendent equation with respect to two unknown input parameters. The method is more efficient for the capillary problem in the channel that could be due to specific features of the exact solution, which is a meromorphic function in the complex plane. For the axisymmetric capillary problem, the exact solution also has single poles in the complex plane but, most probably, there are other singularities, which prevents the rational approximation to converge in a wider neighbourhood.

Adopting the Adomian decomposition leads, depending on how the linear operator component is chosen, to either a polynomial-type approximation, which can be treated as the Taylor-solution of the differential equations, or a trigonometric-type expression, which has the same structure as the asymptotic solution in terms of the Bond number. We compare convergence of these two different approaches in the Adomian decomposition technique as well as evaluate their applicability *versus* the input parameters.

The developed analytical-approximate technique for the differential equations is applied to solve a series of practical problems on the capillary-interface shape in different containers with diverse filling and contact angles.

1. Tkachenko E.M. Analytically approximate capillary surfaces / E.M.Tkachenko, A.N.Timokha // Transactions of the Institute of Mathematics of the NASU. – 2018. – V. 15, N 1.- P. 70-85.
2. Adomian G. Solving Frontier Problems of Physics / G. Adomian. – Kluwer Academic Publishers, 1994.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ КРІЗЬ ЦИЛІНДРИЧНІ ПОРОЖНИНИ

Троценко Я.П.

Течія рідини чи газу в нерегулярних каналах відрізняється складною неоднорідною структурою і може бути нестационарною. При певних умовах це може призвести до виникнення акустичних коливань [1]. В наш час даній проблемі приділяється значна увага як в експериментальному плані, так і в теоретичному. Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки та чисельних методів дає можливість досліджувати такі динамічні системи за допомогою чисельних експериментів, зокрема і прямого чисельного моделювання [2].

У даній роботі досліджується течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами (рис.). При цьому довжина порожнини, утвореної діафрагмами, може набувати різного значення. Вважається, що поверхні каналу та діафрагм абсолютно жорсткі. Течія розглядається при швидкостях значно менших за швидкість звуку в середовищі. Також припускається, що рух рідини в порожнині між діафрагмами є близьким до осесиметричного, на що вказують експериментальні дослідження [2].

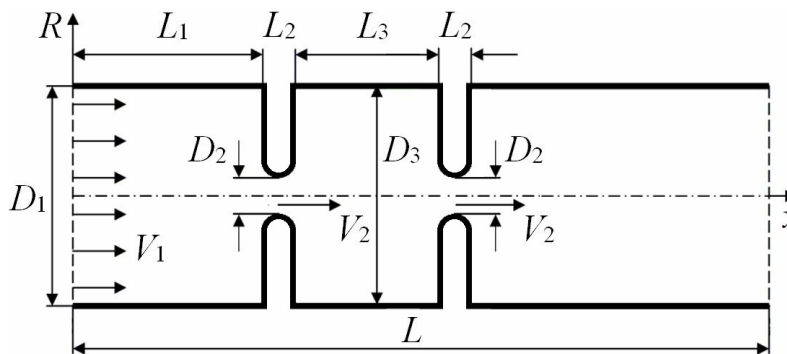


Рис. Геометрія каналу з діафрагмами.

Задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини. Проводиться чисельне розв'язання за методом скінченних об'ємів з використанням різницьових схем другого порядку. У роботі [3] було показано, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса течія рідини в області між діафрагмами характеризується наявністю нестійкого зсувного шару, у якому утворюється послідовний ряд вихорів, що викликають автоколивання швидкості потоку в отворі другої діафрагми. Ці автоколивання можуть бути джерелом звуку в каналі.

Метою даної роботи є дослідження течії рідини в каналі при різних відстанях між діафрагмами, а саме: моделювання відповідних процесів та чисельний розрахунок, аналіз структури потоку в області між діафрагмами і визначення характеристик автоколивальних процесів в залежності від відстані між діафрагмами.

1. Вовк И.В. Звук, рожденный потоком (очерки об аэрогидродинамической акустике) / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 2010. – 221 с.
2. Matsuura K. A throttling mechanism sustaining a hole tone feedback system at very low Mach numbers / K. Matsuura, M. Nakano // J. Fluid Mech. – 2012. – **710**. – P. 569–605.
3. Вовк І.В. Збудження автоколивань потоком рідини в циліндричному каналі з двома діафрагмами / І.В. Вовк, В.Т. Маципура, Я.П. Троценко // Нелінійні коливання. – 2019. – **22**, №1. – 18 с.

Турчин Ігор Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, доцент
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна; Львів, Україна
e-mail: ihorturchyn@gmail.com;

Василько Галина Василівна, аспірантка механіко-математичного факультету,
ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: galina.vasylko@gmail.com;

НЕСТАЦІОНАРНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Турчин І.М., Василько Г.В.

Розглядається півбезмежний однорідний порожнистий циліндр із внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім радіусом R_2 . З моменту часу $t = 0$ циліндр миттєво занурюється на глибину L в середовище, що має сталу температуру T^* . Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами біля границі циліндра вважається, що в результаті цього занурення на торцевих поверхнях циліндра, а також на частині внутрішньої та зовнішньої поверхонь вважається заданим часовий розподіл температури $T_c(t) = T^*(1 - \exp(-t/t_0))$, де t_0 – величина розмірності $[1/\text{сек}]$, яка визначає час стабілізації температури на граничних поверхнях циліндра. Зовні ділянки $0 \leq z \leq L$ на внутрішній та зовнішній поверхнях відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Вважається також, що початкова температура неоднорідного циліндра рівна нулю.

Розв'язок задачі, подібно до [1], будується із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є за змінною $\gamma = z/L$.

В результаті одержано послідовності звичайних диференціальних рівнянь, в яких враховано умови на торцевій поверхні $\gamma = 0$. Побудовано загальний розв'язок цих послідовностей у вигляді алгебричної згортки. Урахування змішаних крайових умов на бічних поверхнях циліндра проводиться із використанням методу рядів Неймана [2]. Після урахування змішаних умов на поверхні покриття одержано послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь. Обґрунтовується збіжність методу редукції одержаних систем. Остаточний розв'язок вихідної задачі теплопровідності подається у вигляді ряду за поліномами Лагерра.

За результатами числового експерименту проводиться аналіз точності задовольнення крайових умов, залежно від утримання членів в рядах за поліномами Лагерра та редукції безмежних алгебричних систем рівнянь, а також особливості нестационарного процесу поширення тепла в циліндрі.

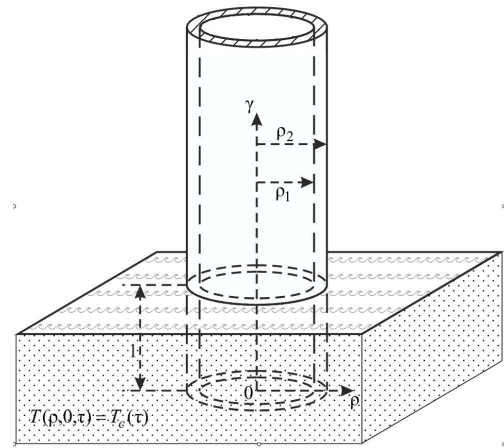


Рис.1.

1. Колодій Ю.О. Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбезмежної плити з двостороннім покриттям/ Ю.О. Колодій, І.М. Турчин, В.В. Хома // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. - Спецвипуск. - С. 119-124.

Улітко Ігор Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua;

Горошко Іван Олегович, кандидат фіз.-мат. наук, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: igoroshko@ukr.net;

Андрущенко Тарас Володимирович, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

ОСОБЛИВОСТІ АКУСТИЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ ПЛАСТИНЧАТОГО ТИПУ НА КРАЙОВИХ МОДАХ

Улітко І.А., Горошко І.О., Андрущенко Т.В.

П'єзоелектричні резонатори пластинчатого типу широко застосовуються в радіочастотних фільтрах, високостабільних генераторах, різноманітних сенсорах [1, 2].

На теперішній час детально описані характеристики і модовий склад резонаторів згинних, продольних, крутильних коливань, а також резонаторів контурно-зсувних, косого зсуву, товщинно-зсувних коливань. У більшості доступних джерел згадка про існування і використання краєвих мод коливань чомусь відсутня, хоча короткий опис існування таких мод, скоріше всього вперше, викладено у [3].

У даній доповіді викладені результати спроби більш детальних теоретико-експериментальних досліджень з метою оцінки можливостей ефективного збудження краєвої моди, її добротності, коефіцієнта електромеханічного зв'язку, форми коливань (вузлових ліній), а також областей практичного застосування.

Слід зауважити, що ідеологічно найбільш близькі до нашого випадку відомі багатоелектродні резонатори із селекцією мод і з так званим захопленням енергії, в яких збуджуються два акустично зв'язаних резонанси.

Об'єктом дослідження були вибрані пластини з п'єзокераміки типу PZT-4 розміром 100x20x5 мм і пластини розміром 125x25x6 мм, виготовлені з високодобротного кварцевого скла з обробкою поверхні високого класу чистоти. Збудження таких пластин реалізувалося через п'єзопластинки товщиною 0,8 мм, наклеєні на торець перших. Але ще більш високодобротними виявилися аналогічні пластини із алюмінієвого сплаву типу Д16Т.

Теоретичні дослідження і аналітична обробка були виконані із залученням програмного пакету ANSYS. Саме результати чисельного моделювання дозволили ідентифікувати частотний спектр і моди коливань як класичні планарні, так і крайові. На завершення доповіді наведені ймовірні області практичного застосування результатів дослідження.

1. Пьезоэлектрические резонаторы: Справочник / Під ред. Андросова В.Г. і інш. – М.: Радио и связь. – 1992. – 392 с.

2. Малов В.В. Пьезорезонансные датчики / В.В. Малов. – М.: Энергоатомиздат. – 1982. – 272 с.

3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.

Fallah Arash S., PhD (Engineering), Dr.
Brunel University London, London, United Kingdom,
e-mail: mestasf@brunel.ac.uk

Tereshchuk Volodymyr V., PhD Candidate (Physics), Mr.
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine,
e-mail: volodymyr379@gmail.com

Navadeh Navid, PhD Candidate (Aeronautics), Mr.
Imperial College London, London, United Kingdom,
e-mail: n.navadeh09@imperial.ac.uk

Gorshkov Vyacheslav N., PhD (Physics), Dr. Sci. (Physics), Prof.
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine,
e-mail: vn.gorshkov@gmail.com

PHONONIC DISPERSION IN FINITE FRACTAL LATTICES

A.S. Fallah, V.V. Tereshchuk, N. Navadeh, V.N. Gorshkov

Fractal microstructures have proved promising in increasing the range of detectable frequencies for devices used in the realm of electromagnetism. Due to the one-to-one correspondence between mechanical and electrical system components, it is conjectured they may provide flexible solutions capable of closing/widening bandgaps and increasing tailorability in phononic lattices. Fractal hyper-lattices of a particular topology have been considered and different aspects of dispersion surface morphology and frequency band structure are studied. It has been observed that higher frequencies that can be excited in the simple square lattice are almost the same as those in the fractal lattice structures, however; through introduction of higher levels, the hyper-lattice presents new features not observable in the ordinary lattice. By increasing the order of fractal structure the number of degrees-of-freedom increases and dispersion surfaces morphologies change thus frequency gaps are eliminated. This phenomenon can be of advantage for acoustic/phononic visibility/detectability e.g. in designing sensors. In the classical analogy to quantum level repulsion surfaces flatten which sufficiently decreases the sound group velocity in the fractal structure, and can be used for numerous practical applications.

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ З ДЕФЕКТОМ

Фесенко Г. О.

Розглянуто нескінченний пружний шар, що в циліндричній системі координат описується співвідношеннями $a \leq r < \infty$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$ з циліндричним отвором або з абсолютно жорстким циліндричним включенням $0 \leq r \leq a$, $0 < \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$.

Грані шару знаходяться в умовах гладкого контакту з жорсткою основою. На циліндричній грані отвору діє нормальне вісьосиметричне динамічне розтягуюче навантаження.

Після використання інтегральних перетворень Лапласа та скінченного $\sin$ -, $\cos$ -перетворення Фур'є до рівнянь руху та граничних умов, задачу записано у вигляді одновимірної відносно невідомого вектора трансформант переміщень $\mathbf{y}(\rho) = (U_{\rho\lambda}(\rho), W_{\rho\lambda}(\rho))^T$:

$$L_2 \mathbf{y}(\rho) = \mathbf{f}(\rho), \quad 1 < \rho < \infty, \quad U_i[\mathbf{y}(\rho)] = \gamma_i, \quad i = 0, 1.$$

Розв'язок задачі у просторі трансформант побудовано з використанням матричного диференціального числення [1].

У випадку циліндричного жорсткого включення, зчепленого з шаром, на одній з граней якого задано нормальне вісьосиметричне динамічне стискаюче навантаження, інша грань знаходиться в умовах зчеплення з абсолютно жорсткою основою, побудовано наближений розв'язок.

Для побудови поля переміщень та напружень у шарі до вісьосиметричних рівнянь руху застосовано послідовно інтегральні перетворення Лапласа та Вебера, що приводить до одновимірної векторної неоднорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень.

Задачу зведено до одновимірної сингулярного інтегрального рівняння на скінченному інтервалі відносно невідомої похідної нормального переміщення. Інтегральне рівняння розв'язано наближено з використанням методу ортогональних многочленів [2] для чого було досліджено характер особливості невідомої функції на границях проміжку інтегрування. Отриману нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь 1-го роду розв'язано методом редукції.

Побудовано точний розв'язок нестационарної задачі для пружного шару з циліндричним жорстким включенням, коли на циліндричній поверхні задано умови гладкого контакту.

Розглянуто випадок нестационарного навантаження у вигляді $p(z, t) = p(z)e^{i\omega t}$. Досліджено нормальні напруження на циліндричній поверхні включення та на нижній грані шару в залежності від механічних та геометричних характеристик шару та дефекту.

1. Попов Г.Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г.Я. Попов, С.А. Абдыманапов, В.В. Ефимов. – Алматы: Изд. Рауан, 1999. – 133 с.
2. Попов Г.Я. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів / Г.Я. Попов, В.В. Реут, М.Г. Моїсєєв, Н.Д. Вайсфельд. – Одеса: Астропринт, 2010. – 120 с.

Фрейдин Александр Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия
e-mail: alexander.freidin@gmail.com

Морозов Никита Федорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик Российской академии наук
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: n.morozov@spbu.ru

Морозов Александр Владимирович
Technische Universität Berlin, Germany
e-mail: morozov@tu-berlin.de

Muller Wolfgang, professor
Technische Universität Berlin, Germany
e-mail: wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de

Шарипова Лия Львовна, кандидат физ.-мат. наук
Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: sleah07@gmail.com

КИНЕТИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И БЛОКИРОВАНИЕ ФРОНТОВ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

Фрейдин А.Б., Морозов Н.Ф., Морозов А.В., Muller W.H., Шарипова Л.Л.

Химические реакции между диффундирующим и деформируемым твердым компонентами реакции моделируются на основе концепции тензора химического сродства (см., напр., [1,2]). При этом скорость фронта реакции определяется нормальной компонентой тензора сродства, а напряжения влияют на скорость фронта реакции так, как они влияют на тензор сродства. Исследована кинетика фронта превращения в зависимости от напряженного состояния и реологических свойств компонентов реакции. Показано, что механические напряжения, порождаемые деформацией превращения, могут ускорять, замедлять и блокировать распространение фронта реакции. Построены запретные зоны, образованные деформациями, при которых превращение не может идти [3]. Исследована устойчивость фронта химической реакции вдали и вблизи состояния блокирования. Для случая линейно-упругих компонентов реакции исследовано как устойчивость зависит от соотношения модулей упругостей компонентов. Продемонстрирован эффект подавления неустойчивости гладкого фронта реакции глобальной кинетикой его распространения вдали от состояния блокирования. Показано, что с потерей устойчивости фронта превращения при приближении к состоянию блокирования может быть связано последующее разрушение. Продемонстрировано, как полученные результаты могут быть использованы для описания реакций литизации кремния при заряде литий-ионной батареи, окисления кремния в различных приложениях, и формирования интерметаллидов в бессвинцовых припоях.

Работа выполнена при финансовой поддержке международного проекта РФФИ – DFG (Грант № 17-51-12055 / MU 1752/47-1)

1. Freidin, A., Korolev, I., Aleshchenko, S., and Vilchevskaya, E. Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations, *Int. J. Fract.* 2016, 202, 245-259.
2. Poluektov M., Freidin A.B., L. Figiel. Modelling stress-affected chemical reactions in non-linear viscoelastic solids with application to lithiation reaction in spherical Si particles. *Int. J. of Eng. Sci.* 2018, 128, 44–62.
3. Freidin A.B., Sharipova L.L. Forbidden strains and stresses in mechanochemistry of chemical reaction fronts. In: *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials* (H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, T. Michelitsch Eds), Springer, 2018, 335-348.