

МІНІСТРЕСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка



**VI International Scientific Conference
«MODERN PROBLEMS OF MECHANICS»**

*Taras Shevchenko National University of Kyiv
Department of Theoretical and Applied Mechanics*

**30-31.08.2021
Kyiv, Ukraine**

VI Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ

МЕЛЕШКО Вячеслав Володимирович



Матеріали конференції
До 70-річчя з дня народження

Київ, Україна
30–31 серпня 2021

СКЛАД ОРГАНІЗАЦІЙНОГО КОМІТЕТУ

VI Міжнародної наукової конференції
Сучасні проблеми механіки (МРМ)
(30-31 серпня 2021 р.)

Голова оргкомітету	– Толстанова Ганна Миколаївна, професор, проректор з наукової роботи
Співголова оргкомітету	– Безущак Оксана Омелянівна, професор, декан механіко-математичного факультету
Члени оргкомітету:	– Жук Ярослав Олександрович, професор, зав.кафедри теоретичної та прикладної механіки, – Маципура Володимир Тимофійович, професор, – Зражевський Григорій Михайлович, доцент, – Лебедєва Ірина Валеріївна, доцент, – Улітко Ігор Андрійович, доцент, – Борисейко Олександр Віталійович, доцент, – Харитонов Олексій Михайлович, доцент, – Куценко Олексій Григорович, доцент, – Курилко Олександр Борисович, асистент, – Клімчук Тарас Володимирович, асистент, – Остос Олександр Хосейович, с.н.с., – Троценко Ярослав Павлович, інж. 1 кат.

Відповідальний секретар оргкомітету

Жук Ярослав Олександрович, зав.кафедри теоретичної та прикладної механіки,
р.(044)259-03-07, м. (097)490-11-89

Секретарі оргкомітету

Яковенко Катерина Іванівна, пров.інж., р.(044)521-35-99 , м.(067)502-99-99

Пучко Наталія Петрівна, інж., р.(044)521-35-99, м.(067)683-45-34

Троценко Ярослав Павлович, інж. 1 кат.,р.(044)521-33-34, м.(050) 160-18-11

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ:

Грінченко В.Т., академік НАН України директор Інституту гідромеханіки НАН України,

Кушнір Р.М., академік НАН України, директор ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Кубенко В.Д., академік НАН України, заступник директора Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

Altenbach H., Professor, Institute of Mechanic (IFME), Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Germany,

Guz, I.A., 6th Century Professor, University of Aberdeen, Scotland, UK,

Kashtalyan M. Yu., Professor, University of Aberdeen, Scotland, UK,

Muller W., Professor, Technical University of Berlin, Germany,

Silberschmidt V., Professor, Loughborough University, UK,

Katica (Stevanović) Hedrih, Mathematical Institute of Serbian Academy of Science and Arts (SANU), Serbia,

Вайсфельд Н.Д., зав. кафедри Одеського національного університету ім. І.І.Мечникова,

Григоренко О.Я., член-кор. НАН України, зав. відділу Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

Дзюба А.П., професор Дніпровського національного університету ім. О. Гончара,

Жук Я.О., член-кор. НАН України, зав. кафедри Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,

Зражевський Г.М., доцент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,

Карнаухов В.Г., зав. відділу Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

Краснопольська Т.С., провід. наук.співроб. Інституту гідромеханіки НАН України,

Кізілова Н.М., професор Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна,

Лобода В.В., зав.кафедри Дніпровського національного університету ім. О. Гончара,

Мацитура В.Т., професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка,

Можаровський В.В., професор Гомельського державного університету ім. Франциска Скорини, Білорусія,

Олійник В.Н., ст. наук. співроб. Інституту гідромеханіки НАН України,

Попов В.Г., зав. кафедри Одеської національної морської академії,

Сенченков І.К., головний наук. співр. Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

Сулим Г.Т., зав. кафедри Львівського національного університету ім. Івана Франка

З М І С Т

<i>Адлущкий В.Я., Лобода В.В.</i> Пружно-пластична контактна задача для міжфазної тріщини в площині з еліптичним включенням	9
<i>Андрущенко В.О., Горошко І.О., Нікітенко В.М.</i> Експериментальне та чисельне дослідження крайових резонансів у пружних пластинах з накладками на кінцях	10
<i>Батюк Л.В., Кізілова Н.М.</i> Моделювання осциляції поверхонь клітин крові як заповнених рідиною багатошарових в'язкопружних оболонок	11
<i>Batyuk L., Kizilova N., Berest V.</i> Theoretical investigation of flow rate of cellular fluid through the capillary of dielectric meter	12
<i>Борисейко О.В., Лебедєва І.В.</i> Про керований підвід енергії до п'єзокерамічних елементів конструкцій	13
<i>Вайсфельд Н.Д., Процеров Ю.С., Пожиленков О.В.</i> Хвильове поле прямокутної області під дією усталених коливань	14
<i>Валєєва І.К.</i> Адгезійний контакт тіл з викривленою шорсткою поверхнею	15
<i>Васін П.О., Злосчастєв Д.К., Черній Д.І.</i> Обчислювальна технологія для задач з вільними границями	16
<i>Воскобійник В.А., Воскобойник О.А., Терещенко Л.М., Воскобійник А.В.</i> Вихрова динаміка сполучених течій	17
<i>Голуб В.П.</i> Щодо розрахунку релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з лінійно-в'язкопружних матеріалів	18
<i>Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Borisenko M.Yu., Boychuk O.V.</i> Numerical and experimental approaches to determining the frequencies of free vibrations of plates of complex shape	19
<i>Грінченко В.Т. Мелешко В.В.:</i> Як все починалося	20
<i>Гусак В.О.</i> Випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі	21
<i>Довжик М.В., Назаренко В.М.</i> Руйнування композитних та вискоеластичних матеріалів під час стиску вздовж двох паралельних дископодібних тріщин	22
<i>Жук О.П., Жук Я.О.</i> Визначення акустичної радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку в пружній трубі з рідиною	23
<i>Жук Я.О., Мельниченко М.М., Гаврилюк Д.В.</i> Вивчення нанорозмірних плівок золота методом скануючої тунельної мікроскопії	24
<i>Журавльова З.Ю.</i> Нестационарна задача теорії пружності для чвертьплощини	25
<i>Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф.</i> Комбінування детермінованого та стохастичного методів до розв'язання задачі дефектоскопії пружного стержня	26

<i>Калиняк Б.М.</i> Умови нагрівання і характеристики матеріалів, які забезпечують відсутність напружень у довгому неоднорідному прямокутному брусі	27
<i>Камінський А.О., Дудик М.В., Феньків В.М.</i> Дослідження початкового етапу зрушення міжфазної тріщини з контактом берегів від кутової точки ламаної межі поділу	28
<i>Кізілова Н.М., Ричак Н.Л.</i> Математичне моделювання впливу шквального вітру на технічні та рослинні структури на урбанізованих територіях	29
<i>Клімчук Т.В., Острик В.І.</i> Дослідження розподілів максимальних дотичних напружень в періодичній задачі Каттанео – Міндліна	30
<i>Кобзар Ю.М.</i> Руйнування стержня внаслідок втоми за умов багатоциклового симетричного кручення	31
<i>Коломійчук О.П.</i> Адаптивна ідентифікація керованої системи з шумом на вході зі збуреною кососиметричною матрицею коефіцієнтів	32
<i>Коновалюк Т.П., Краснопольська Т.С., Печук Є.Д.</i> Вплив внутрішньої динаміки когерентних вихрових структур, що взаємодіють між собою, на генероване звукове поле	33
<i>Котов Т.О., Мазко О.Г.</i> Зважена оцінка та мінімізація впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування	34
<i>Козлов В.І., Зінчук Л.П.</i> Чисельно-аналітична методика розрахунку критичного навантаження на тривимірні тіла з в'язкопружного п'єзоелектричного матеріалу при вимушених коливаннях	35
<i>Krasnopol'skaya T.I.</i> Optimization of mixing in the staggered herringbone micromixer using Meleshko's analytical solution	36
<i>Krushynska A.O.</i> In memory of prof. Viatcheslav V. Meleshko (1951-2011): waveguiding of elastic waves in solids	37
<i>Кундрат М.М.</i> Гранична рівновага тіла з включення за умов плоскої задачі термопружності	38
<i>Курилко О.Б.</i> Моделювання процесу змішування в'язкої рідини в прямокутній порожнині при сталих дотичних швидкостях	39
<i>Кушнір Р.М., Токовий Ю.В.</i> Пружна рівновага тіл скінченних розмірів: кути у "куті"	40
<i>Куценко О.Г., Харитонов О.М.</i> Алгоритм розв'язку нестационарної задачі термопружності для двошарового циліндра при змінному коефіцієнті теплообміну	41
<i>Куценко О.Г., Харитонova Л.В., Куценко А.Г.</i> Дослідження перфорованих пластин методом скінченних елементів	42
<i>Лагодзінський О.Є., Тимоха О.М.</i> Резонансні тривимірні усталені коливання	43

рідини в контейнері квадратного перерізу для довільних періодичних непараметричних збурень

Ловейкін А.В. Особливість потенціального поля у вершині чотирилопатевого симетричного вістря 44

Лубков М.В. Застосування скінченно-елементно-різницевого методу для моделювання анізотропних фільтраційних процесів 45

Махоркін М.І., Махоркіна Т.А. Поздовжній зсув композитного клину із вставкою з функціонально-градієнтного матеріалу 46

Маковійчук М.В., Шацький І.П., Щербій А.Б. Про розподіл напружень біля тріщини у тороїдальній оболонці з гнучким покриттям 47

Malyuga V.S., Duhnovsky V.Yu., Zhuk Ya.O. Stokes flows in 3D containers 48

Маслов Б.П. Спадкова повзучість ізотропних композитів випадкової структури при складному напруженому стані 49

Можаровський В.В., Кузьменков Д.С., Москалева М.В., Киргинцева С.В. Реалізація методики розрахунку контактної взаємодії зубців зубчатих коліс із композитних матеріалів 50

Мисов К.Д., Вайсфельд Н.Д. Концентрація динамічних напружень поблизу конусоподібної тріщини в двічі-зрізаному пружному конусі 51

Mehreganian Navid, Arash S. Fallah, Pooya Sareh Multistable architected mechanical metamaterials: negative stiffness metalattice as impact dissipator 52

Назаренко В.М., Кіпніс О.Л. Гранична рівновага біоднорідної площини з маломасштабними міжфазними зсувними тріщинами в кутовій точці за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини 53

Новицький Ві.Ві., Новицький В.В. Математична модель руху еритроцита в капілярі 54

Oliynik V.N. A statistical algorithm for fast estimation of heart rate and localization of cardiac tones in phonocardiograms recorded by electronic stethoscopes 55

Онишкевич В.М., Барабаш Г.М. Моделювання контактної взаємодії "третім тілом" у трибологічних задачах 56

Остос О.Х., Жук Я.О. Зв'язані термомеханічні коливання еластомерної циліндричної оболонки з попередніми напруженнями 57

Павлюк Я.В. Моделювання деформацій циклічної повзучості нелінійно в'язкопружних матеріалів за допомогою функції Хевісайда 58

Петренко Н.В. Напружено-деформований стан безперервного злитка 59

Плацинська А.В. Щодо способу розрахунку кінетики накопичення пошкодження 60

вздовж фронту тріщини втоми в тонких пластинах

Попов В.Г., Кирилова О.І. Числове розв'язання сингулярного інтегрального рівняння, пов'язаного з динамічною задачею контактної взаємодії 61

Райновський І.А., Тимоха О.М. Про демпфовані усталені резонансні коливання рідини в контейнері кругового перерізу для довільних періодичних непараметричних збурень 62

Реут О.В., Вайсфельд Н.Д. Невісесиметрична задача динамічної теорії пружності для зрізаного кругового конусу з вирізом уздовж твірної 63

Реут В.В., Зємсков О.В. Антиплоска задача для клиноподібного середовища, послабленого кінцевою тріщиною, яка розташована на відріжку прямої 64

Ревенко В.П. Комп'ютерний метод розв'язання крайових задач теорії пружності з використанням неортогональних систем функцій 65

Рево С.Л., Авраменко Т.Г., Мельниченко М.М., Іваненко К.І. Фізико-механічні характеристики нанокмпозиційних матеріалів на основі фторопласту 66

Резнік В.С., Ушаков О.І., Горун О.Ю. Щодо розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях з полімерних матеріалів за умов розтягу з крученням 67

Резнік В.С. Обґрунтування застосування нелінійної моделі в'язкопружності типу моделі Работнова в задачах повзучості 68

Романов О.В. Щодо впливу напруженого стану на деформування конструкційних матеріалів 69

Савельєва К.В., Дашко О.Г. Взаємодія плоских пружних хвиль. Врахування квадратичної та кубічної нелінійностей 70

Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Застосування моделі мультилінійної когезійної зони до задачі про крайову тріщину в ізотропному та ортотропному тілі 71

Сенченков І.К., Червінко О.П., Доля О.В. Чисельне моделювання термо-напружено-деформованого стану елементів у процесі 3D-друку 72

Середницька Х.І. Параметр термічної ректифікації для біматеріалу з періодичною системою міжфазних щілин 73

Stone Howard Alvin Slava Meleshko's impact on fluid mechanics and micromixing 74

Timokha A.N. Mathematics of exotic sloshing phenomena 75

Токовий Ю.В., Бойко Д.С. інтегральні рівняння тривимірних задач теорії пружності та термопружності для трансверсально ізотропних тіл 76

Троценко Я.П. Течія рідини в циліндричному каналі з діафрагмами прямокутного профілю 77

Улітко І.А., Борисейко О.В., Яксон Є.А. Математична модель п'єзоелектричного 78

гіроскопічного сенсора на об'ємних хвилях зсуву

Улітко І.А., Курилко О.Б., Затхей М.Б. Визначення параметрів первинної моди 79
твердотільного гіроскопу камертонного типу

Fallah Arash S., Gorshkov V., Navadeh Navid, Tereschuk V. Wave propagation in 80
pseudo-fractal hyper-lattices

GertJan F. van Heijst Slava Meleshko's contributions to fluid mechanics 81

Хорошев К.Г., Кикоть С.В. Методика визначення власних частот та власних 82
форм регулярних ланцюгових коливальних систем

Shvets A. Yu., Donetskyi S.V. Generalization of the concept of attractors in nonideal 83
pendulum systems

Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В., Ясінський А.В. Осесиметричний термонапружений 84
стан скінченного порожнистого циліндра

Яковенко Н.Д., Червінко О.П., Якименко С.М. Порівняння лінійного і нелінійного 85
правил сумішей при визначенні непружних характеристик багатофазних
матеріалів у динамічних задачах

Адлуцький Віктор Якович, кандидат фіз.-мат. наук, с.н.с.,
 Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
 e-mail: adluckii_vy_kkt@dnua.dp.ua;
 Лобода Володимир Васильович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна,
 e-mail: loboda@dnua.dp.ua

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ В ПЛОЩИНІ З ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Адлуцький В.Я., Лобода В.В.

Розглядається задача про визначення пружно-пластичного напружено-деформованого стану матриці з еліптичним включенням з іншого матеріалу при наявності дугової тріщини на їх границі. Деформування здійснюється під дією довільно орієнтованих механічних зусиль, прикладених на нескінченності. Між берегами тріщини допускається виникнення контактних макрозон. Прийнято модель ізотропного зміцнення матеріалів з білінійною апроксимацією кривих «напруження-деформація». Застосовано метод скінченних елементів, що дозволяє істотно розширити клас задач при дослідженні біматеріалів з міжфазними тріщинами і дає можливість виявляти особливості деформування, які не можуть бути розглянуті через труднощі аналітичного характеру. Чисельне розв'язання зазначеної задачі в широкому діапазоні геометричних і фізичних параметрів здійснюється в середовищі пакета COSMOS/M 2.6, що реалізує процедури МСЕ для широкого класу задач механіки суцільного середовища. Моделювання контактної взаємодії нескінченної площини із включенням здійснювалось аналогічно роботі [1]. Тестування моделі у випадку пружної задачі для кругового включення з тріщиною показало хороший збіг отриманих значень параметрів руйнування з точними даними [2].

Найбільш суттєвими з отриманих результатів є такі:

1. Врахування пластичного деформування матеріалів в околі вершин тріщини у міру зростання рівня навантаження на нескінченності призводить до певного зростання розбіжностей між значеннями J -інтегралів для чисто пружної та пружно-пластичної моделей деформування. Однак, оскільки очікується, що внаслідок вичерпання тріщиностійкості матеріалу процес руйнування може починатися при достатньо низьких рівнях навантаження, результати для обох моделей будуть відрізнятися мало.

2. Розвиток пластичних зон в околах вершин тріщини при наявності двох різних матеріалів відбувається переважно в бік більш м'якого матеріалу. Розкриття тріщини при врахуванні пластичного деформування є дещо більшим, ніж у випадку чисто пружного деформування. Найбільші розбіжності між результатами для обох моделей спостерігаються ближче до вершин тріщини.

3. Значення нормальних контактних зусиль для пружно-пластичної моделі є дещо нижчими, ніж для чисто пружної моделі. Розміри макрозон контактної взаємодії для обох моделей майже не відрізняються.

Зазначені особливості дозволяють стверджувати, що в докритичному стані відмінності між пружним та пружно-пластичним деформуванням не є суттєвими, і для розглянутих задач використання пружної моделі є виправданим.

1. Адлуцький В.Я. Скінченноеlementний аналіз пружно-пластичного стану тріщини на межі розділу площини з круговим включенням / В.Я. Адлуцький, А.Ю. Годес, В.В. Лобода // Вісник КНУ. Сер. Фіз.-матем. науки. – 2019, № 1. – С. 19-22.

2. Годес А.Ю. Контактная задача для межфазной дуговой трещины / А.Ю. Годес, В.В. Лобода // Вісник Дніпропетровського ун-ту: Серія Механіка. – 1915. – 19 (2). – С.3-17.

Андрущенко Володимир Олександрович,
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: andruschenko.v.a@gmail.com
 Горошко Іван Олегович, кандидат фіз.-мат. наук,
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 Нікітенко Віктор Миколайович,
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: nivini55v@gmail.com

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ТА ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ РЕЗОНАНСІВ У ПРУЖНИХ ПЛАСТИНАХ З НАКЛАДКАМИ НА КІНЦЯХ

Андрущенко В.О., Горошко І.О., Нікітенко В.М.

Відкрите в середині 50-х років XX ст. явище крайового резонансу в пружних тілах і до сьогодні привертає активну увагу дослідників та інженерів [1–3]. Даний ефект локалізації коливального руху знаходить застосування при створенні твердотільних акустичних резонаторів та акустоелектронних пристроїв, при розв'язанні задач визначення пружних параметрів та неруйнівного контролю, створенні вібродвигунів тощо.

У теперішньому дослідженні головний акцент зроблено на аналіз впливу на частоти крайових резонансів зміни умов на кінцях пружних пластин, викликаних наявністю накладок з іншого матеріалу – в даному випадку наклеєних на них п'єзопластин.

Спочатку був виконаний модельний фізичний експеримент на резонаторі з високочастотного алюмінієвого сплаву Д16Т розмірами $300 \times 100 \times 10$ мм. Для збудження коливань на його торцях були наклеєні п'єзопластинки $100 \times 10 \times 1$ мм. За допомогою пісочних фігур Хладні вдалося зафіксувати динаміку руху частинок на поверхні пластини. Одночасно було здійснено чисельне моделювання методом скінченних елементів. Як виявилось, якщо на протилежному від збуджуючого п'єзоелементу кінці пластини п'єзоелемент буде розікнутим, то виміряна частота крайового резонансу з максимумом коливань на збуджуваному кінці є рівною 21,361 кГц (розрахунок показує, що наявність накладок призводить до зниження частоти приблизно на 850 Гц); при цьому амплітуда коливань на протилежному кінці є малою. Друга крайова резонансна мода з максимумом руху на протилежному від збуджуваного кінці спостерігається на частоті, вищій приблизно на 60 Гц. Якщо ж протилежний п'єзоелемент є закороченим, то на дещо нижчих частотах спостерігається пара близьких ($\Delta f < 20$ Гц) коливальних мод, рух у першій з яких, як видно з результатів чисельного моделювання, є антисиметричним відносно середини пластини, а у другій – симетричним (так само, як і у випадку пластини без накладок на кінцях).

Були також проведені дослідження для резонатора з кварцового скла $120 \times 25 \times 6$ мм, на одному з кінців якого була приклеєна п'єзопластинка шириною 6 і товщиною 1 мм з невеликими двосторонніми звисами $\approx 1,2$ мм для припаювання провідників. Крайова мода з локалізацією на кінці пластини біля п'єзоелемента спостерігалась на частоті 84,286 кГц, що виявилось приблизно на 1,5 кГц нижче від очікуваної частоти без урахування наявності п'єзопластини. Комп'ютерне моделювання показало, що збільшення звису п'єзопластинки знижує частоту крайового резонансу.

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
2. Lawrie J.B. Edge waves and resonance on elastic structures: An overview / J.B. Lawrie, J. Kaplunov // Math. Mech. of Solids. – 2012. – Vol. 17, N 1. – P. 4–16.
3. Pagneux V. Trapped Modes and Edge Resonances in Acoustics and Elasticity // R. Craster, J. Kaplunov (Eds.). Dynamic Localization Phenomena in Elasticity, Acoustics and Electromagnetism. – CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 547, 2013 – P. 181–223.

Батюк Лілія Василівна, канд.т фіз.-мат. наук, доцент, факультет медичної і біологічної фізики
Харківський національний медичний університет, Харків, Україна
e-mail: liliya-batyuk@ukr.net

Кізілова Наталія Миколаївна, доктор фіз.-мат. наук, професор, факультет математики і інформатики,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна
e-mail: n.kizilova@gmail.com;

МОДЕЛЮВАННЯ ОСЦИЛЯЦІЙ ПОВЕРХОНЬ КЛІТИН КРОВІ ЯК ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ БАГАТОШАРОВИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

Батюк Л.В., Кізілова Н.М.

Еритроцити крові людини являються собою в'язкопружні оболонки які заповнені концентрованим розчином гемоглобіну. Форма еритроцитів залежить від різних факторів і може бути двоввігнутою, дископодібною, сферичною або напівсферичною. Численні експериментальні дослідження показали, що пружні модулі E_{1-3} , модулі зсуву G_{1-3} і в'язкості мембрани η_2 і розчину гемоглобіну η_1 є важливими показниками для більш детальної діагностики захворювань [1]. Оскільки еритроцити мають не тільки мембрану, але і цитоскелет, поверхневі білки і гідратні оболонки складної структури, для обробки і біомеханічної інтерпретації даних експериментів найбільш корисні відповідні багатошарові моделі еритроцитів [2].

Геометрична модель була отримана як поверхня обернення (Рис.1а). Найпростіша реологічна модель містить шари оболонки з різними модулями Юнга і в'язкостями (Рис.1б).

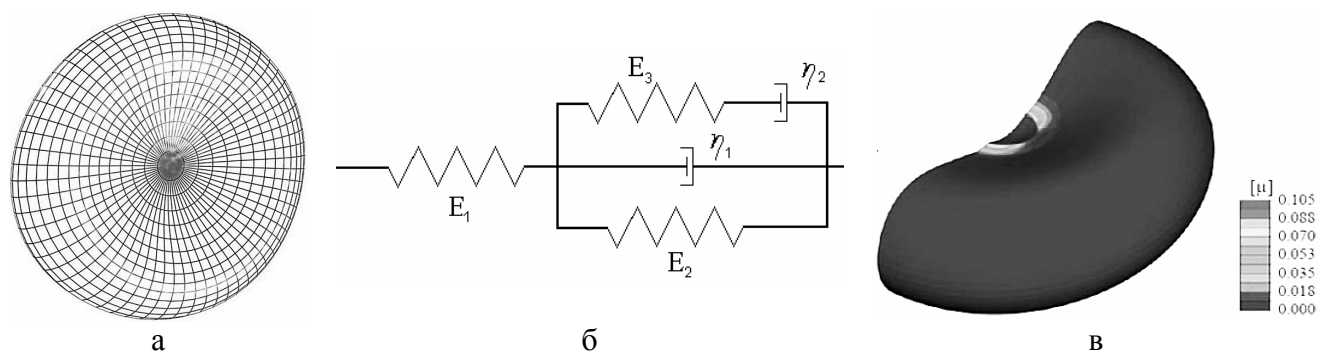


Рис.1. Геометрична (а) і реологічна (б) моделі еритроцита і результати розрахунків МСЕ (в)

Чисельні розрахунки проводилися за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) і пакету прикладних програм AnSys2021R1 (академічна версія). Вивчався напружено-деформівний стан (Рис.1в) моделі під впливом постійного і змінного тиску, зосереджених зсувних і нормальних сил. Вивчена чутливість моделі (Рис.1б) до змін кожного з реологічних параметрів в фізіологічному діапазоні ($\pm 50\%$). Для кожного випадку були обчислені криві $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$ і визначений мінімальний набір експериментів, який дозволяє обчислити всі моделі пружності і в'язкості на основі запропонованої біомеханічної моделі.

1. Puig-de-Morales-Marinkovic M. Viscoelasticity of the human red blood cell / M. Puig-de-Morales-Marinkovic, K.T. Turner, J.P. Butler, et al. // Am. J. Physiol. – 2007. – Vol.293. – P.597–605. doi:10.1152/ajpcell.00562.2006.

2. Batyuk L. Modeling of dielectric permittivity of the erythrocytes membrane as a three-layer model / L. Batyuk, N. Kizilova. // Development trends in medical science and practice. Riga: "Baltija Publishing". – 2018. – P. 18-37. doi:10.30525/978-9934-571-31-2

Batyuk Liliya, Candidate of Biological Sciences

Associate professor of Department of Medical and Biological Physics and Medical Information Science,
Kharkiv National Medical University

e-mail: liliya-batyuk@ukr.net

Kizilova Natalya, Doctor of Physical&Mathematical Sciences, V.N. Karazin Kharkiv National University

e-mail: n.kizilova@gmail.com

Berest Vladimir, Candidate of Physical&Mathematical Sciences, Head of Department of Molecular and Medical Biophysics, V.N. Karazin Kharkiv National University

e-mail: vp.berest@gmail.com

THEORETICAL INVESTIGATION OF FLOWS RATE OF CELLULAR FLUID THROUGH THE CAPILLARY OF DIELECTROMETER

Batyuk L., Kizilova N., Berest V.

The phenomenon of capillary surface properties in contact with blood is associated with two factors, namely the energy factor, which is associated with interfacial tension and electrical factor. A number of assumptions accepted in many studies of electrokinetic phenomena in thin and ultrathin capillaries are based on the possibility of using the classical Navier-Stokes equation to construct a profile of flow velocities in narrow capillaries [1]. The conclusion of this equation does not take into account conditions where the effect of electrokinetic inhibition is maximum. The generalization of electrokinetic phenomena in thin capillaries during the leakage of inhomogeneous, non-Newtonian fluids, such as blood, the properties of which are due to macromolecules, organic compounds and proteins, is associated with finding a solution for the electrohydrodynamic system of equations. Blood is a dispersed medium and the description of flows, including electrokinetic ones, cannot be based only on the solution of the Navier-Stokes equation, it is essential for a smaller radius of the capillary. For a dispersed medium, the effective capillary radius may be an order of magnitude smaller than that corresponding to the primary measurements.

A large number of works are devoted to the rheological equation of blood, where you can find various functional approximations of blood flows. The actual hydrodynamic dimensions of the capillaries in which the blood flows may actually be smaller due to the tinning of the capillary surface due to the formation of a near-surface gel layer, which is characteristic of capillary materials in which the Copley-Scott Blair effect is observed (for some types of glass). It is necessary to take into account the stiffness and permeability of the surface and its effect on the electrokinetic fluid flow. Based on the viscoplastic properties of blood, for the hydrodynamic profile of the fluid flow rate in the capillary of the microwave dielectrometer [2], we can write

$$V = \frac{r}{\eta} \tau \left[\left(1 - \frac{d}{2r} \right) \cdot \left(\frac{d}{2r} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{d}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{\tau_0}{\tau} \cdot \frac{d}{r} \right],$$

where η is the viscosity of the medium, τ is the friction voltage around the perimeter of the capillary section, τ_0 is a maximum shear stress, r is a capillary radius, d is the thickness of the adsorption layer of liquid particles. If $\tau_0 = 0$, the equation passes into the classical Poiseuille formula. Regarding the electrical component of velocity, it should be calculated similarly for a Newtonian fluid. The results of the calculations showed that in the capillary of the high-frequency dielectrometer there is an increase in the inhibition of fluid flow with increasing parameter τ/τ_0 . The dependence of inhibition on the surface potential will be extreme. The point of minimum τ/τ_0 with increasing Kisan properties of blood during inhibition of the latter will increase.

1. Батюк Л.В., Кізілова Н.М. Дослідження течій бінгамівських нанорідин по мікроканалах / Л.В. Батюк, Н.М. Кізілова // Вісник Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького. Серія: Прикладна математика. Інформатика. – № 2. – 2019. – С. 4-10.
- Gatash S.V. Very high-frequency dielectrometer for the study of dynamical processes in disperse water system / S.V. Gatash // Радиофизика и электроника. – 1999. – Т. 4, № 1. – С. 129-132.

Борисейко Олександр Віталійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: b12313@ukr.net;
 Лебедева Ірина Валеріївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: lebedevai@ukr.net.

ПРО КЕРОВАНІЙ ПІДВІД ЕНЕРГІЇ ДО П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Задачі дослідження з'язаних полів у пружних тілах, тобто задачі термопружності, електропружності, магнітопружності тощо є широко відомими і традиційно важливими як для фундаментальних досліджень статичної та динамічної поведінки твердих тіл, так і для прикладних інженерних розробок. Для п'єзокерамічних елементів задачі статички, насамперед, пов'язані з дослідженнями деформації, наприклад, тензорних сенсорів та інших п'єзодатчиків деформації, температури тощо. У динамічних задачах важливими є питання про спектр робочих частот та ефективність перетворення енергії в об'ємі елемента з п'єзокераміки, мірою якої є динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Зрозуміло, що підвищення КЕМЗ приводить до більш надійної якості роботи приладу, складовою частиною якого є перетворювач енергії.

Для стандартних п'єзокерамічних елементів (стержнів, пластин, оболонок) з суцільним електродним покриттям найбільш ефективною є перша резонансна частота [1]. Коефіцієнт ефективності перетворення енергії на вищих частотах, навіть на другій, є значно нижчим, ніж на першій (головній) робочій частоті. Тобто, стандартний п'єзоелемент має досить вузьку частотну область використання. Виникає проблема розширення цієї області шляхом підвищення ефективності перетворення енергії на робочих частотах, відмінних від першої, або взагалі зміни спектру власних частот елемента без зміни його конструкційних характеристик.

Для вирішення проблем такого типу є кілька способів. Наприклад, розділити поверхневі електроди тонкими діелектричними проміжками з можливістю підведення до різних частин електродного покриття різного за амплітудою (у тому числі й нульового), або фазою електричного навантаження; інакше, частину поверхні елемента просто залишити без електродного покриття. Таким чином, можна певною мірою покращити ефективність перетворення енергії на першій частоті, або ж "придушити" першу (а, можливо, й деякі інші) частоту, підвищивши при цьому КЕМЗ на вищих частотах [2].

Інший підхід полягає у застосуванні біморфних п'єзоперетворювачів, які можуть отримувати деформації розтягу-стиску, або деформації чистого згину, або ж складну деформацію у залежності від геометричних розмірів складових частин та схеми електродів (зовнішніх та внутрішніх). При цьому КЕМЗ на спектрі згинних частот також є достатньо високим і складає приблизно 75% від планарного (поздовжнього) КЕМЗ [3].

1. Механика связанных полей в элементах конструкций: у 5 т. / [Отв.ред. А.Н. Гузь]. – Київ: Наук. думка, 1989. – Т.5: Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – 280 с.

2. Андрущенко В.О. Дослідження ефективності перетворення енергії у п'єзоелементах з розрізними електродами / В.О. Андрущенко, О.В. Борисейко, І.А. Улітко, В.В. Бендюг, М.В. Кононіченко // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 63 – 65.

3. Андрущенко В.О. Спектр резонансных частот біморфних п'єзоелементів / В.О. Андрущенко, О.В. Борисейко, І.А. Улітко, С.Ю. Яцків // Вісник Київського університету. Серія: фіз. - мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 66 – 68.

Вайсфельд Наталя Данилівна, доктор фіз.-мат. наук, факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua;

Процеров Юрій Сергійович, кандидат фіз.-мат. наук, факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

e-mail: protserov@onu.edu.ua;

Пожиленков Олексій Вадимович, студент другого курсу аспірантури, факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

e-mail: leshiy12345678@gmail.com

ХВИЛЬОВЕ ПОЛЕ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ПІД ДІЄЮ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ

Вайсфельд Н. Д., Процеров Ю.С., Пожиленков О. В.

Розв'язано динамічну задачу теорії пружності для прямокутної плоскої області. На бічних гранях та на нижній грані області розглядаються або умови другої основної задачі теорії пружності або умови ідеального контакту. По верхній грані задано динамічне нормальне навантаження. Потрібно знайти хвильове поле прямокутної області за умови виконання відповідних крайових умов та системи рівнянь руху.

$$\begin{cases} u''_x(x, y, t) + u^{**}_x(x, y, t) + \mu_0 (u''_x(x, y, t) + u'^*_y(x, y, t)) = \rho \frac{\partial^2 u_x(x, y, t)}{\partial t^2} \\ u''_y(x, y, t) + u^{**}_y(x, y, t) + \mu_0 (u^{**}_y(x, y, t) + u'^*_x(x, y, t)) = \rho \frac{\partial^2 u_y(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t < \infty$$

$$\sigma_y(x, b, t) = -p(x, t), \quad \tau_{yx}(x, b, t) = 0, \quad u_y(x, 0, t) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0, t) = 0$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad \tau_{yx}(0, y, t) = 0, \quad u_x(a, y, t) = 0, \quad \tau_{yx}(a, y, t) = 0$$

$$u_y(x, y, t) = e^{i\omega t} u_y(x, y), \quad u_x(x, y, t) = e^{i\omega t} u_x(x, y), \quad p(x, t) = e^{i\omega t} p(x),$$

$$f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f^*(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Після застосування інтегрального перетворення Фур'є у просторі трансформант отримано векторну крайову задачу відносно невідомого вектора трансформант переміщень. Крайову задачу розв'язано точно за допомогою методу матричного диференціального числення. Для цього побудовано фундаментальну матрицю та систему базисних матриць-функцій. Це проведено за процедурами, що описані у [1,2]. Остаточні розрахункові формули для поля переміщень і напружень побудовано шляхом застосування оберненого перетворення Фур'є. Досліджено поля переміщень та напружень для різних видів навантаження та розмірів прямокутної області.

1. Pozhylenkov O. V. (2019) The stress state of the rectangular elastic domain. *Researches in Mathematics and Mechanics*. Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa. Volume 24, № 2(34).
2. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. *Procedia Structural Integrity*. Volume 28, pp. 458-463.

Валєєва Ірина Кимівна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М.Францевича НАНУ,
 e-mail: valeeva@meta.ua

АДГЕЗІЙНИЙ КОНТАКТ ТІЛ З ВИКРИВЛЕНОЮ ШОРСТКОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Валєєва І.К.

Розглядаються моделі адгезійного контакту між пружними тілами зі стохастичною шорсткістю поверхні. Шорсткість моделюється нелінійним шаром Вінклера–Фуса, який може протистояти стискаючим і розтягуючим (у разі адгезії) контактним напруженням [1]. Механічні властивості шару визначаються статистичними теоріями адгезійного контакту між номінально плоскими шорсткими поверхнями. Контакт тіл описується нелінійними граничними інтегральними рівняннями з немонотонними операторами [1,2]

$$u(\mathbf{x}) + \theta \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(u(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \delta - f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega, P = \int_{\Omega} p(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (1)$$

де $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ – єдина невідома функція, Ω – довільна область, яка містить номінальну область контакту S ; δ – зближенням тіл; P – нормальна сила, що прикладена до тіл; $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$; f – номінальний зазор між тілом і умовною межею адгезійної взаємодії $x_3 = 0$ перед деформацією; $\theta = (\pi E^*)^{-1}$; E^* – приведений модуль контактної пари. Функція $p(\cdot)$ залежить від мікрогеометричних параметрів шорсткості, розподілу висот нерівностей, пружних властивостей твердих тіл і питомої роботи адгезії w . Вважається, що $p > 0$ відповідає стисканню, а $p < 0$ – розтягу. Для розв’язання нелінійних граничних інтегральних рівнянь (1) використовується метод послідовних наближень. Розв’язки рівняння (1) визначають обтиснення ефективної товщини шорсткого шару, контактні напруження, номінальну область контакту при різних зближеннях контактуючих тіл і параметрах шорсткості. Сила адгезії визначається чисельно як $F = -\min P(\delta)$ для конкретної пари тіл.

Запропонована модель адгезії шорстких пружних твердих тіл дозволяє вивчати контакт твердих тіл з довільною номінальною геометрією. Модель може бути застосовано для оцінки адгезійних та пружних властивостей шорстких пружних тіл за допомогою індентування.

Для найбільш поширеного випадку номінальної геометрії контактуючих тіл – параболічного зазору між контактуючими тілами – запропоновано апроксимаційну формулу для визначення сили адгезії (сили відриву). Формулу отримано за результатами обчислень, коли контакти окремих нерівностей описуються DMT–теорією контакту, для якої характерні тверді тіла, малі радіуси кривизни вершин нерівностей, низька енергія адгезії.

Результати обчислень підтверджують, що на величину сили адгезії істотно впливають як мікрогеометричні параметри шорсткості, так і макрогеометричні параметри контактуючих тіл.

1. Galanov B.A. Models of adhesive contact between rough elastic bodies / B.A. Galanov // International Journal of Mechanical Sciences. – 2011. – V. 53. – P. 968–977.

2. Galanov B.A. Sliding adhesive contact of elastic solids with stochastic roughness / B.A. Galanov, I.K.Valeeva // International Journal of Engineering Science. – 2016. – V. 101. – P. 64–80.

Васін Павло Олексійович¹, аспірант,

e-mail: vasin_pavlo@ukr.net;

Злосчастєв Данило Костянтинівич¹, студент магістратури,

e-mail: dan.zloschastiev@gmail.com;

Черній Дмитро Іванович¹, д. т. н., доцент,

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: Dmytro.Cherniy@gmail.com

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ ДЛЯ ЗАДАЧ З ВІЛЬНИМИ ГРАНИЦЯМИ

Васін П.О., Злосчастєв Д.К., Черній Д.І.

В системі координат xy розглядається течія в деформованій області $D(t)$, з рухомими детермінованими та з рухомими вільними границями- контурами $L_d(t)$ і $L_v(t)$.

Розглядається динамічна задача взаємодії середовищ в деформованій області $D(t)$, з різнотипними рухомими границями- контурами $L_d(t)$ і $L_v(t)$. До таких задач відносяться класи задач з відривними явищами, задачі проникнення через вільну границю відокремлення виходу/вода, або задачі динаміки рідини з вільною границею.

Для вирішення плоскої задачі про нестационарну течію в деформованій області $D(t)$, з непроникними, рухомими зі швидкостями $\vec{w}_d$ і $\vec{w}_v$ границями - контурами $L_d(t)$ і $L_v(t)$, використовується математична модель (с параметричної залежністю від часу t , яка в термінах ТФКЗ має інтегральні представлення розв'язку у вигляді:

$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (1)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega, \quad (2)$$

В силу суттєвої мінливості області із заздалегідь невідомою формою частини границь, рішення задачі про нестационарну течію навколо непроникних рухомих різнотипних границь можливо тільки чисельними методами, при застосуванні обчислювальних технологій.

Розглядається обчислювальна технологія, що заснована на застосуванні методу дискретних особливостей для дискретизації моделей (1),(2).

$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}(t)) + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0s}^p(t)) \quad (3)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i(z - \omega_{0j}(t))} + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i(z - \omega_{0s}^p(t))}, \quad (4)$$

Метод та алгоритм розв'язання задач надає результат у вигляді векторних полів швидкостей, розподілу тисків в областях та епюр навантажень на границях.

- [1] Г.В. Логвинович. *Гідродинаміка течій з вільними границями*. Наукова думка, Київ, Україна, 1969.
- [2] С.К. Бетяєв. *Гідродинаміка: проблеми і парадокси*. Успіхи фізичних наук, №3, 1995.
- [3] А.Я. Сагомонян. *Удар і проникнення тіла в рідину*. Видавництво Московського університета, Москва, Росія, 1986.
- [4] С.О. Довгий, С.І. Ляшко, Д.І. Черній. *Алгоритми методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій*. Кібернетика і системний аналіз, №6, 2017. (Dovgiy S. O. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies/ Dovgiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – Vol. 53, 6. – P. 950-962.)
- [5] Довгий С.А. Метод сингулярних інтегральних уравнений и вычислительные технологии. / Довгий С. А., Лифанов И. К., Черний Д. И. – К.: «Юстон», – 2016. – 380 с.

Воскобійник Володимир Анатолійович, доктор техн. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна
 e-mail: vlad.vsk@gmail.com;
 Воскобойник Олександр Анатолійович, кандидат техн. наук,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна
 e-mail: alexandr.vsk@gmail.com;
 Терещенко Лідія Миколаївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна
 e-mail: litere70@gmail.com;
 Воскобійник Андрій Володимирович, кандидат техн. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна
 e-mail: andrey.vsk@gmail.com

ВИХРОВА ДИНАМІКА СПОЛУЧЕНИХ ТЕЧІЙ

Воскобійник В.А., Воскобойник О.А., Терещенко Л.М., Воскобійник А.В.

Спряжена течія – це класична проблема механіки рідини та газу, яка має широке застосування в аеро- та гідродинаміці. Спряження крила з фюзеляжем літака, виступаючих конструкцій на корпусах суден, автомобілів, лопаток турбін на їх корпусах, опор мостових переходів на дні водоймищ та багато інших широко застосовується у практичній діяльності людства в конструкціях та технологічних процесах. Перед погано обтічним тілом примежовий шар, що утворюється на обтічній поверхні, на яку встановлено це тіло, через дію несприятливого градієнту тиску відривається. Взаємодія спадаючої течії на передній стороні, наприклад, опори та відривного примежового шару призводять до формування пристінних струменів та системи підковоподібних вихорів, які омивають опору в області її підмурку. Система вихорів складається з первинних підковоподібних вихорів та вторинних протилежно обертових вихорів. На бокових поверхнях погано обтічних тіл формуються зсувні шари, які під час пересування у корму цих тіл згортаються у слідні вихори або вихрові трубки, які з часом відриваються від поверхні тіл та формують, за відповідних умов, вихрову доріжку Кармана [1]. Взаємодія вихрових структур, спадаючої течії, зсувних шарів між собою та обтічними поверхнями має дуже складний характер. На обтічних поверхнях та поблизу них утворюються інтенсивні поля дотичних напружень, пульсацій швидкості та тиску, що спричиняють розмиви і намиви ґрунтів, на яких знаходяться опори мостів [2]. Якщо погано обтічні тіла або мостові опори знаходяться у групах, то вихрові та струменеві течії ускладнюються та потребують значних зусиль для їх досліджень і створення умов безаварійної експлуатації конструкцій, де присутні сполучені течії. В роботі проведено дослідження механізму утворення вихрової течії в околі трирядної багатопальнової конструкції, отримані картини візуалізації, поля швидкості та особливості вихрових та струменевих течій. Проведено просторово-часовий аналіз результатів досліджень та отримано інтегральні та спектральні гідродинамічні характеристики.

1. Voskoboinick V.A., Gorban I.M., Voskoboinick A.A., Tereshchenko L.N., Voskoboinick A.V. Junction Flow Around Cylinder Group on Flat Plate // In: Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (eds) Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Springer, Cham. – 2021. – P. 35-50. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50302-4_3

2. Voskoboinick A., Voskoboinick V., Turick V., Voskoboinyk O., Cherny D., Tereshchenko L. Interaction of Group of Bridge Piers on Scour // In: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEE 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 1247. Springer, Cham, 2021. – P. 3-17. https://doi.org/10.1007/978-3-030-55506-1_1

Голуб Владислав Петрович, доктор техн. наук, професор
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
 e-mail: creep@inmeh.kiev.ua

ЩОДО РОЗРАХУНКУ РЕЛАКСАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ З ЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Голуб В.П.

Розв'язується задача розрахунку релаксації нормальних і дотичних напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням. Напружений стан оболонки в загальному випадку навантаження двовісний, однорідний та статично визначений.

Релаксація нормальних $\sigma_{11}(t)$ та дотичних $\tau_{21}(t)$ напружень при фіксованих значеннях деформацій ε_{11} та ε_{21} розраховується за рівнянням

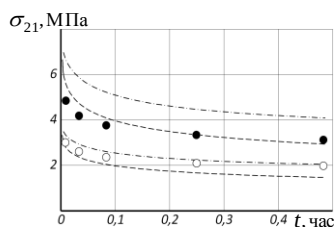
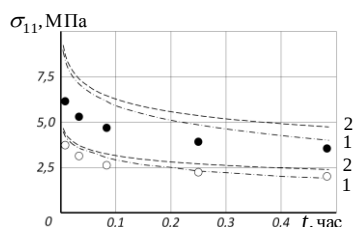
$$\sigma_{11}(t) = \frac{2}{3} E \varepsilon_{11} \left(1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_i))} \right) + \frac{1}{3} E \varepsilon_{11} \left(1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_v))} \right) \quad (1)$$

і відповідно за рівнянням

$$\tau_{21}(t) = 2G\varepsilon_{21} \left(1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_i))} \right), \quad (2)$$

які отримані виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів [1]. Тут E , G – модулі поздовжньої та зсувної повзучості; α , β , λ – параметри дробово-експоненційних ядер спадковості; $\Gamma(\cdot)$ – гама функція Ейлера.

Результати розрахунків релаксації нормальних і дотичних напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з



«полиэтилена высокой плотности ПЭВП», що виконані за рівняннями (1) і (2), зіставлені на рис. з експериментальними даними, що запозичені із [2]: $\varepsilon_{11} = 0,71$ і $\varepsilon_{21} = 0,61\%$ (лінії 1; $\circ$); $\varepsilon_{11} = 1,41$ і $\varepsilon_{21} =$

1,22% (лінії 2; $\bullet$). У цілому, як видно, отримане цілком задовільне узгодження результатів розрахунку (штрихові лінії) з експериментальними даними (точки).

1. Голуб В.П., Маслов Б.П., Фернати П.В. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 2. Случай пропорциональности девiatorов // Прикл. механика, 2016. – Том 52, № 6. – С. 111-125.

2. Крегера А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов, 1985. – №2. – С. 195-201.

Grigorenko Alexandr Yaroslavovych, Dr Sci., Prof.,
Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com;
 Müller Wolfgang H., Dr. rer. nat., Prof.,
Berlin University of Technology, Berlin, Germany,
 e-mail: whmueller1000@gmail.com;
 Borisenko Maksym Yuriiiovych, Ph.D.,
Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: mechanics530@gmail.com;
 Boychuk Olena Volodymyrivna, Ph.D.,
Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv, Ukraine,
 e-mail: boychuklena27@gmail.com.

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL APPROACHES TO DETERMINING THE FREQUENCIES OF FREE VIBRATIONS OF PLATES OF COMPLEX SHAPE

Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V.

The design of buildings and frames of various machines and structures requires preliminary calculations for stability and strength. The calculation of the frequencies of free vibrations is important, since in real operating environments it is necessary to avoid destructive resonance conditions. Plates of different shapes, with different apertures and with different boundary conditions, are used to construct such structures. An urgent problem of mechanics arises about the extension of analytical, numerical and experimental methods to solving problems of the dynamics of plates of various shapes. Currently, a variety of computer-aided design software systems, based on various numerical methods – the finite element method (FEM), for example – are widely used to solve this problem. One such system is FEMAP with the NX Nastran solver, which has been tested on a large number of problems of plate dynamics [1-3]; the calculation results strongly agree with results obtained experimentally [3]. In addition to FEM, there are numerous other methods. In [4], for example, the frequencies of free vibrations of a square plate with rigidly fixed edges were calculated using the Rayleigh-Ritz formula; again, the calculation results strongly agree with the results obtained by other authors using experimental and numerical methods.

The purpose of this study is to determine the frequencies and modes of free vibrations of an isotropic thin five-pointed plate with free edges using the Rayleigh-Ritz formula and the Chladni's experiment. The geometry of the five-pointed plate, the physical and mechanical characteristics of the material, and meshing by finite elements are selected in accordance with the plate considered in [2].

1. Borisenko M. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone / M. Borisenko, A. Zavorodnii, R. Skupskiy // *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2019 - Vol.18, No. 1 - P. 5-13.
2. Grigorenko Ya. Determination of frequencies and forms of free vibrations of five-point plates by the method of finite elements / A.Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, O.V. Boychuk // *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, series "Physics and Mathematics"*, 2020. - 1-2. - S. 61-66.
3. Grigorenko Ya. Application of experimental and numerical methods to the study of free vibrations of rectangular plates / A.Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, O.V. Boychuk, V.S. Novitsky // *Problems of computational mechanics and structural strength*, 2019. - No. 29. - S. 103-112.
4. Grigorenko Ya. Numerical analysis of free vibrations of rectangular plates based on various approaches / A.Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, O.V. Boychuk, V.S. Novitsky // *Bulletin of Zaporozhye National University, series of physical and mathematical sciences*, 2019. - №1. - S. 33-41.

Грінченко Віктор Тимофійович, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

МЕЛЕШКО В.В. : ЯК ВСЕ ПОЧИНАЛОСЯ

Грінченко В.Т.

Наша перша зустріч з В.В.Мелешком сталася в той час (1973 рік), коли ще було нормою, що кращі випускники механіко-математичного факультету йдуть до аспірантури. Я не знаю його вражень від нашої першої зустрічі, але мені він сподобався своєю енергією, здатністю емоційно з ентузіазмом реагувати на нові наукові задачі і, особливо, його володінням англійською мовою. Я не побоюся сказати, що експлуатував його знання, оскільки в університеті вивчав німецьку мову. Задачею, за яку ми взялися разом, була задача про крайовий резонанс, нетривіальне явище в динаміці пружних тіл. Дуже багато працювали з літературними джерелами і накопичення знань привело нас до другої цікавої проблеми - проблеми Лагранжевого хаосу в динаміці в'язкої рідини.

Були зроблені цікаві роботи, проведена конференція CHAOS – IV (American – Russian – Ukrainian Conference on Chaos, Kiev, Ukraine, 20 -24 July 1992) у Києві [1,2].

Особливо цікавим досягненням нашим було видання "чорної книги" [3] по хвилям в пружних тілах. Крім лінгвістичних здібностей В.В. Мелешка, я ще мав можливість проексплуатувати його молоду привабливість для дівчат, що працювали на БЕСМ-4 операторами. Без його дружніх відносин з ними наша чорна книжка вийшла б набагато пізніше. У цій книжці розглянуто питання крайового резонансу, а також розвитку проблем, з яких починали і, особливо, проблеми розвитку методів розв'язання граничних задач механіки.

[1] V.T. Grinchenko Analytical study of chaotic mixing for Stokes flow in a rectangular cavity. CHAOS-IV, Kiev, Ukraine, July 1992.

[2] V.V. Meleshko, Regular and chaotic advection by point vortices in two-dimensional bounded domains. CHAOS-IV, Kiev, Ukraine, July 1992.

[3] Грінченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Грінченко, В.В. Мелешко – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.

Гусак Віталій Олександрович, аспірант, механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: gusakw7@gmail.com

ВИПРОМІНЮВАННЯ ПЛОСКОГО ПОРШНЯ У КЛИНУВАТОМУ ХВИЛЕВОДІ

Гусак В.О.

В роботі, на базі методу часткових областей, розглянута задача випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. Спряження хвильових полів на межах часткових областей проводилося для вибраного набору точок на цих межах. Кількість точок визначалася прийнятною точністю спряження полів на межах часткових областей. Досліджено особливості випромінювання плоского поршня у клинуватий хвилевод в залежності від параметрів задачі, а саме, кута розхилу клину і хвильового розміру поршня, тобто відношення довжини поршня до довжини хвилі, котру він випромінює. Обчислені діаграми спрямованості плоского поршня у клинуватому хвилеводі при різних кутах розхилу клину. Показано, що при певному співвідношенні між хвильовим розміром поршня і кутом розхилу клину можлива наявність мінімуму у діаграмі спрямованості уздовж осі симетрії клину. Така ситуація обумовлена тим, що у дальньому полі випромінювача перша і друга симетричні моди клинуватого хвилеводу являються практично протифазні уздовж осі хвилеводу, що і призводить до провалу у діаграмі спрямованості. Подібний ефект спостерігався при аналізі задачі про поширення хвилі у хвилеводі, котрий утворений зчленуванням плоскопаралельного і клинуватого хвилеводів [1, 2]. Проведено розрахунки модуля тиску в околі поршня, котрі ілюструють, як поступово формується провал в діаграмі спрямованості в напрямку осі хвилеводу.

1. Viktor T. Grinchenko, Igor V. Vovk, Vladimir T. Matsypura. Acoustic wave problems. - New York: Begell House, Inc., 2018 - 439 p.

2. Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Основи акустики. – Київ: Наукова думка, 2007. - 640 .

Довжик Михайло Вікторович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: dovzhyk.m.v@ukr.net;
 Назаренко Володимир Михайлович, чл.-кор. НАН України, д.т.н., професор,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: nazvm1@gmail.com

РУЙНУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ ТА ВИСОКОЕЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС СТИСКУ ВЗДОВЖ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ДИСКООПІБНИХ ТРІЩИН

Довжик М.В, Назаренко В.М.

Вивчення руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин є окремою проблемою механіки руйнування. В цьому випадку неможливо використовувати критерій Гріффітса-Ірвіна то інші підходи, запропоновані в рамках класичної механіки руйнування. Існує два підходи для дослідження таких задач [1]. Перший ґрунтується на використанні наближених розрахункових схем, коли відокремлені тріщинами елементи замінюють балкою, пластиною або оболонкою, його було запропоновано в [2]. Але цей метод має суттєві недоліки: потрібно проводити окремі дослідження для визначення можливості його застосування з точки зору тонкостінності та умов закріплення виділеного тріщинами елемента. Другий підхід в якості критерію руйнування використовує критерій локальної втрати стійкості матеріалу в околі тріщини в межах тривимірної лінеаризованої теорії пружності. За цим підходом руйнування ініціює момент локальної втрати стійкості матеріалу поблизу тріщин, а критичні параметри стиску визначають з розв'язання відповідних задач на власні значення, скориставшись тривимірною лінеаризованою теорією стійкості деформівних тіл.

В рамках другого підходу, визначення критичних напружень для композитного матеріалу під час стиску вздовж двох паралельних дископодібних тріщин зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь з допоміжною умовою

$$\begin{aligned} f(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\ g(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0; \\ (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1); \quad f(\xi) &\equiv \varphi(a\xi); \quad g(\xi) \equiv \psi(a\xi). \end{aligned} \quad (1)$$

з відповідними ядрами для композитних та високоеластичних матеріалів.

Скориставшись чисельно-аналітичною методою, запропонованою в [3] для розв'язання (1), вдалось отримати межі застосування наближених розрахункових схем, як з точки зору тонкостінності так і з точки зору умов закріплення для високоеластичних та композитних матеріалів.

3. Гузь А.Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 1. – С. 5–88.

4. Obreimoff I.W. The splitting strength of mica // Proc. Roy. Soc. of London. – 1930. – 127 A. – P. 290–297.

5. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / А.Н. Гузь, М.В. Довжик, В.М. Назаренко // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 6. – С. 28–37.

Жук Олександр Петрович, доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна;

e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: y.zhuk@i.ua

ВИЗНАЧЕННЯ АКУСТИЧНОЇ РАДІАЦІЙНОЇ СИЛИ, ЩО ДІЄ НА ТВЕРДУ СФЕРИЧНУ ЧАСТИНКУ В ПРУЖНІЙ ТРУБІ З РІДИНОЮ

Жук О.П., Жук Я.О.

Розглядається випадок поширення у вузькій циліндричній трубі плоскої поздовжньої звукової хвилі, в якій складові руху рідини, паралельні осі труби, мають значно більшу кінетичну енергію ніж складові, перпендикулярні осі труби [1]. Дослідження дії акустичної радіаційної сили звукового поля на тверду сферичну частинку в заповненій ідеальною рідиною тонкостінній пружній циліндричній трубі проведено у два етапи [2]: перший – розв’язання лінійної задачі розсіяння первинної хвилі на перешкодах; другий – обчислення гідродинамічних сил, які діють на сферичну частинку, з наступним осередненням їх в часі.

Дослідження виконаємо для випадку циліндричної труби, радіус якої дорівнює a_0 при відсутності в трубі тиску; товщина стінки h . Матеріал труби має модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν . Труба заповнена ідеальною стисливою рідиною густиною ρ_0 , швидкість звуку в якій c_0 . В трубі знаходиться тверда сферична частинка радіусу d з центром на осі труби. Введемо циліндричну систему координат (R, z, φ) , вісь Oz якої направимо вздовж осі труби, а початок координат виберемо в центрі сферичної частинки. Введемо також сферичну систему координат (r, θ, φ) .

Вздовж осі поширюється плоска звукова хвиля, потенціал Φ_0 якої в системі координат $Oxyz$ (рис.1) має такий вигляд

$$\Phi_0 = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1)$$

де A – амплітуда, k – хвильове число, ω – кутова частота.

Потенціал хвильового поля в трубі формується в результаті інтерференції первинної хвилі (1) і хвиль, розсіяних на твердій сфері і відбитих від стінки труби. В результаті потенціал хвильового поля в трубі має такий вигляд:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{sph} + \Phi_{cyl}. \quad (2)$$

де Φ_{sph} – потенціал хвилі, відбитої від сферичної частинки; Φ_{cyl} – потенціал хвилі, відбитої від еластичної стінки труби; Φ – повний потенціал хвильового поля в трубі.

В роботі побудовано ці потенціали хвильового поля в трубі методом розділення змінних у відповідних системах координат і знайдено тиск p і гідродинамічну силу F_z

$$F_z = -2\pi r_0^2 \int_0^\pi p \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

осереднення якої в часі дає вираз для акустичної радіаційної сили

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left\{ (R_n R_{n+1} + S_n S_{n+1}) [n(n+2) - (\omega d)^2] \right\}. \quad (3)$$

Тут R_i і S_i знаходяться з використанням дійсних і уявних частин виразу потенціалу (2).

1. King L.V. On the acoustic radiation pressure on sphere//Proc. Roy. Soc. Ser.A.-1934.- 147, N 861. – P.212 – 240.

2. Zhuk A.P, Kubenko V.D, Zhuk Ya.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-field cavity // JASA – 2012. – 132 (4). – P. 2189 – 2197.

Жук Ярослав Олександрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: y.zhuk@i.ua;

Мельниченко Микола Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, ст.наук.співробітник,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua;

Гаврилюк Дар'я Вікторівна, магістр другого року навчання механіко-математичного факультету,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: 20thfoxgellar@gmail.com

ВИВЧЕННЯ НАНОРОЗМІРНИХ ПЛІВОК ЗОЛОТА МЕТОДОМ СКАНУЮЧОЇ ТУНЕЛЬНОЇ МІКРОСКОПІЇ

Жук Я.О., Мельниченко М.М., Гаврилюк Д.В.

Сучасний успіх мікро- та наноелектроніки базується на фундаментальних дослідженнях у галузі фізики поверхні твердого тіла. Тому вивчення різних електронних, атомних та молекулярних процесів, що відбуваються на поверхні твердих речовин, є актуальним завданням. Плівки, що мають нанорозмірну товщину, широко використовуються у всіх сферах нанотехнологій. Особливий інтерес представляють нанорозмірні плівки з фрактальною структурою. Властивості таких плівок (оптичні та електрофізичні) суттєво відрізняються від звичайних нанорозмірних аналогів. Такі нанорозмірні плівки можна отримувати різними способами. Існуючий взаємозв'язок між структурою та морфологією отриманих плівок та особливостями технологічних режимів їх виробництва відкриває певні перспективи у створенні плівок із заданими властивостями.

На сьогоднішній день метод тунельної мікроскопії знаходить все більш широке застосування для визначення лінійних розмірів мікронних і нанорозмірних структур, включаючи галузь виробництва елементної бази для сучасної електроніки, а також є одним із методів випробування якості поверхні зразків. Нанорозмірні плівки та наночастинки золота наносились на різні типи підкладок (полірована поверхня монокристалічного кремнію, слюда, скло) магнетронним та катодним напиленням. Було продемонстровано, що незважаючи на різницю в морфології тонких плівок золота, отриманих різними методами та на різних підкладках, плівки в основному складаються із сферичних наночастинок. На прикладі плівки золота на слюді були визначені лінійні розміри окремих поверхневих об'єктів. Аналіз морфології поверхні показав, що її структурні утворення розподілені рівномірно і мають розміри від 250 нм до 500 нм. У той же час окремі елементи нанорозмірної плівки мають багаточисельну структуру з дуже розвиненим рельєфом поверхні. При отриманні наноплівки золота магнетронним розпиленням на скляній підкладці розмір окремих наночастинок золота коливається від 20 нм до 80 нм. При іонному розпиленні на підкладку полірованого монокристалічного кремнію розмір окремих наночастинок золота коливається від 2 нм до 10 нм. Спостерігається об'єднання окремих наночастинок у великі видовжені нанооб'єкти розміром до 20-40 нм. У цьому випадку окремі наночастинки та їх скупчення мають розвинену поверхню орієнтовано видовжених об'єктів розміром до 1 нм.

Таким чином, маючи можливість порівнювати дані про режим вакуумного осадження (температура підкладки, щільність пучка, час осадження тощо), а також про рельєф поверхні, можна розробити технології отримання поверхні із заданим набором властивостей, а також розробити нові методи осадження золота на різних поверхнях.

Отримані результати дуже важливі для застосування в біології та медицині. Вони дають можливість створювати різні типи датчиків, діагностичні тести, а також цілеспрямовану доставку ліків для лікування захворювань.

Журавльова Зінаїда Юріївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua;

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЧВЕРТЬПЛОЩИНИ

Журавльова З.Ю.

Розглядається пружна чвертьплощина, що займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $x, y > 0$. Бічна грань чвертьплощини знаходиться в умовах зчеплення $u(0, y, t) = 0, v(0, y, t) = 0$. По верхній грані на чвертьплощину діє нормальне навантаження інтенсивності $p(x, t)$: $\sigma_y|_{y=0} = p(x, t), \tau_{xy}|_{y=0} = 0, 0 < a_0 < x < a_1, t > 0$, $v|_{y=0} = 0, \tau_{xy}|_{y=0} = 0, 0 < x < a_0, x > a_1, t > 0$. Потрібно визначити переміщення та напруження, які задовольняють крайові умови, нульові початкові умови та рівняння руху.

Вихідна задача зводиться до одновимірної за допомогою перетворення Лапласа за змінною t та півнескінченного $\sin$ -, $\cos$ -перетворення Фур'є за змінною y . Крайова задача у просторі трансформант записується у векторному вигляді

$$\begin{cases} L_2 \vec{y}_{s\beta}(x) = \vec{f}_s(x), \\ \vec{y}_{s\beta}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Тут s, β – параметри перетворення Лапласа та Фур'є відповідно,

$$L_2 \vec{y}_{s\beta}(x) = \vec{y}_{s\beta}''(x) + 2\beta Q \vec{y}_{s\beta}'(x) - P_{s\beta} \vec{y}_{s\beta}(x), \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_s(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi_s'(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi_s(x) \end{pmatrix},$$

$$P_{s\beta} = \begin{pmatrix} (\beta^2 + q^2) \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} + q^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{s\beta}(x) = \begin{pmatrix} u_{s\beta}(x) \\ v_{s\beta}(x) \end{pmatrix}, \quad q^2 = \rho / G \cdot s^2, \quad \chi(x, t) = v|_{y=0}.$$

Розв'язання задачі (1) будується у вигляді суперпозиції загального розв'язку векторного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного векторного рівняння та має вигляд

$$\vec{y}_{s\beta}(x) = (Y_1(x) + Y_2(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^\infty G_s(x, \xi) \vec{f}_s(\xi) d\xi \quad (2)$$

де $Y_1(x), Y_2(x)$ – система фундаментальних матричних розв'язків рівняння $L_2 Y_{s\beta}(x) = 0$, c_1, c_2 – сталі, що знаходяться з виконання крайової умови у (1), $G_s(x, \xi)$ – матриця-функція Гріна.

Для обернення отриманих розв'язків у просторі трансформант (2) використовується метод сумісного обернення перетворення Лапласа та Фур'є [1]. У результаті отримано вирази для функцій переміщень та напружень, що містять невідому функцію $\chi(x, t)$. Вона знаходиться з розв'язання сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_{-1}^1 \int_0^t \chi(\xi, t-\tau) g(\xi, x, y, \tau) d\tau d\xi = r(x, t), \quad -1 < x < -1 \quad (3)$$

що розв'язано за допомогою методу ортогональних поліномів [2].

1. Слепян Л.И. Механика трещин / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1990. – 296 с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. – Москва: Изд-во Наука, 1982. – 344 с.

Зражевський Григорій Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: zgrig@univ.kiev.ua;

Зражевська Віра Федорівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Національний технічний університет України "Київський політехнічний університет імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна,

e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

КОМБІНУВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ТА СТОХАСТИЧНОГО МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДЕФЕКТОСКОПІ ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ

Зражевський Г. М., Зражевська В. Ф.

В роботі розглянута задача про власні гармонійних коливання пружного стрижня з вільними від напружень торців при наявності в ньому одного або сукупності дефектів. Дефекти моделюються неоднорідністю модуля Юнга. За параметри дефектів прийняті їх розташування, геометричні розміри, що вважається малими та зміни пружних властивостей. Предметом дослідження є аналіз зсувів власних частот коливань, що спричинені дефектністю стрижня. Метою роботи є математичне обґрунтування для побудови швидких та стійких алгоритмів визначення параметрів дефектності пружних тіл шляхом аналізу вільних коливань. В роботі використовуються та порівнюються принципово різні методи дослідження. Перші методи є класичними математичними методами механіки, що застосовуються до аналізу детермінованих систем та базуються на аналітичних дослідженнях поєднаних з чисельною реалізацією. На противагу їм, для розв'язання оберненої задачі використаний Bootstrap-aggregated Regression Trees (BART) - метаалгоритм композиційного машинного навчання, що стандартним чином застосовується в статистичній класифікації та регресуванні. При порівнянні побудованих алгоритмів використаний статистичний метод Sampling, що дозволив кількісно оцінити точності та стійкості алгоритмів.

Для розв'язання прямої задачі визначення зсувів власних частот коливань запропонований новий метод, що ґрунтується на аналітичному продовженні розв'язку в область дефекту та дозволяє звести граничну задачу коливання стрижня з дефектом до нескінченного рекурентного набору граничних задач зі стрибками. Такий підхід дозволив будувати власні форми коливань та розраховувати зсуви власних частот коливань для стрижня в якому розташовується множинний ансамбль дефектів з заданими характеристиками. Процедура є рекурентною, отже дозволяє отримати розв'язок з заданою точністю та проаналізувати взаємну інтерференцію дефектів. Розв'язання прямої задачі не викликало проблем та дозволило визначити зсув власних частот коливань з довільною точністю. Проведений аналітико-чисельний аналіз залежності точності визначення зсувів частот коливань від порядку наближення. Обернена задача сформульована як задача визначення характеристик дефекту - місця розташування, розміру та зміни модуля Юнга при розташуванні одного дефекту та загальної дефектності стрижня при заданні множинних дефектів. За первинну інформацію прийняті зсуви частот власних коливань. Побудовані при розв'язанні прямої задачі рівняння частот дозволили звести обернену задачу до знаходження коренів векторного рівняння відносно характеристик дефектів. Аналіз рівнянь призвів до розробки алгоритму, що базується на модифікованому методі Ньютона для розв'язання регуляризованого векторного рівняння з штрафними членами для забезпечення знаходження коренів, що є фізичними. Алгоритм виявився достатньо складним та не гарантує повністю стійкого розв'язання на великому ансамблі прикладів. Це спонукало нас до застосування для розв'язання оберненої задачі методу BART. Побудова регресійного дерева потребує відносно значних ресурсів, проте саме розв'язання (що зводиться власне кажучи до класифікації регресій) надзвичайно просте та продемонструвало стійкість розв'язання при достатньо високій точності.

Калиняк Богдан Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
e-mail: b-kalynyak@litech.net

УМОВИ НАГРІВАННЯ І ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ, ЯКІ ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ ВІДСУТНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ У ДОВГОМУ НЕОДНОРІДНОМУ ПРЯМОКУТНОМУ БРУСІ

Калиняк Б.М.

Об'єктом дослідження є довгий ізотропний неоднорідний у перерізі прямокутний брус. Початок правосторонньої координат знаходиться у центрі прямокутного перерізу, осі Ox , Oy направлені вздовж сторін прямокутного перерізу, Oz – по висоті бруса. Фізико-механічні характеристики матеріалу бруса E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона, α , λ – коефіцієнти лінійного теплового розширення та теплопровідності відповідно, а також стаціонарне температурне поле і напруження є функціями двох координат x , y . Модель температурного поля – стаціонарне рівняння теплопровідності з об'ємними тепловими джерелами на основі закону Фур'є та класичними умовами теплообміну на межах бруса.

Предметом дослідження є встановлення: а) умов нагрівання та способів їх досягнення, які призводять до відсутності напружень при сталій осьовій деформації, якщо відомі характеристики матеріалу; б) розподілу характеристик матеріалу і зв'язок з умовами нагрівання при відсутності об'ємних теплових джерел, які призводять до відсутності напружень у брусі. Завданням є визначення точних аналітичних розв'язків такої задачі.

З класичної моделі незв'язаної термопружності отримуємо вираз $T(x, y) = C / \alpha(x, y)$, який, є необхідною і достатньою умовою відсутності напружень. Це означає, що подане вище температурне поле повинно задовольняти відповідну задачу теплопровідності, яка стає моделлю зв'язку між коефіцієнтом теплового лінійного розширення, теплофізичними характеристиками матеріалів та призводить до узгодження розподілів температур на поверхнях бруса і рівності температур навколишнього середовища на його ребрах.

Відповідна обернена нелінійна задача теплопровідності відносно коефіцієнта теплопровідності має точні аналітичні розв'язки, якщо характеристики матеріалів $p(x, y)$ можна подати у вигляді $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$. У припущенні, що характеристики функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ) описують моделлю простої суміші, можна отримати такі аналітичні вирази для $I(x, y) = I_x(x)I_y(y) = C_3 \exp(\frac{1}{2}cx^2 + C_1x) \exp(-\frac{1}{2}cy^2 + C_2y)$ (коефіцієнта теплопровідності), зв'язків між коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення складових $I_1 / I_2 = \alpha_1 / \alpha_2$, $V(x, y) = [I_x(x)I_y(y) - I_2] / (I_1 - I_2)$ (концентрації одного матеріалу в іншому), а отже і вираз для температурного поля. Індеси біля характеристик «1» та «2» стосуються постійних характеристик складових ФГМ, c , C_1 , C_2 , C_3 – сталі, які визначені з умов теплообміну на межах бруса. Наведені чисельні результати і вхідні дані вказують на можливість забезпечення відсутності напружень у брусі при перепаді температури між межами у декілька сотень градусів і наявності ФГМ, для складових яких виконується $I_1 / I_2 = \alpha_1 / \alpha_2$, певними законами нагрівання меж бруса. Задачі про температурні поля, які не викликають напружень в однорідних тілах розглянуті в [1,2].

1. Мелан Э. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – Москва. : Физматгиз, 1958. – 167 с.

2. Підстригач Я.С. Вибрані праці / Я.С. Підстригач. – Київ.: Наук. думка, 1995. – 460 с.

Камінський Анатолій Олексійович, доктор фіз.-мат. наук, професор
 Інститут механіки імені С. П. Тимошенко НАН України, Київ, Україна
 e-mail: dfm11@ukr.net

Дудик Михайло Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
 Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна
 e-mail: dudik_m@hotmail.com

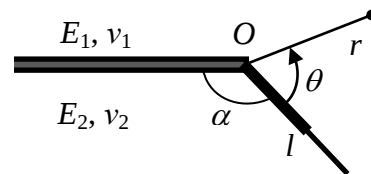
Феньків Володимир Михайлович, аспірант
 Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна
 e-mail: fenkiv@ukr.net

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ЕТАПУ ЗРУШЕННЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З КОНТАКТОМ БЕРЕГІВ ВІД КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

Камінський А. О., Дудик М. В., Феньків В. М.

Вершина міжфазної тріщини з вільними від навантаження берегами у кутовій точці ламаної межі поділу двох різних матеріалів є концентратором напружень з показником сингулярності, який для досить широкого інтервалу кутів зламу має уявну частину, що передбачає фізично неможливий взаємний перетин берегів тріщини [1]. Натомість аналогічна модель тріщини з контактуючими берегами (модель М. Комніноу [2]) позбавлена такого недоліку, але викликає питання про механізм зрушення такої тріщини.

В даній роботі в умовах плоскої деформації досліджується початковий етап зрушення міжфазної тріщини з контактуючими берегами від кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, який вбачається в утворенні маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі на продовженні тріщини. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу (рис.). Враховується взаємодія берегів тріщини за законом сухого тертя. Вважаючи розміри області контакту берегів значно більшими за розміри зони передруйнування, при формулюванні умови на нескінченості використано метод зрощування асимптотичних розв'язків.



За допомогою інтегрального перетворення Мелліна відповідна крайова задача зведена до функціонального рівняння для трансформант нормального напруження і градієнта нормального переміщення на лінії з'єднання матеріалів, яке розв'язано засобами методу Вінера - Гопфа. З отриманого розв'язку знайдено вирази для довжини зони передруйнування і локального поля напружень в її околі. Визначено величину розходження границь зони, яка використовується в подальшому у деформаційному критерії утворення в ній вторинної мікротріщини. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини, який передбачає її об'єднання зі зростаючою при збільшенні навантаження мікротріщиною. Виконано числовий аналіз залежності параметрів зони передруйнування від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла.

1. Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54, № 2. С. 103-114.

2. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1977. Vol. 44. P. 780-781.

Кізілова Наталія Миколаївна, доктор фіз.-мат. наук, професор, факультет математики і інформатики,

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна
e-mail: n.kizilova@gmail.com;

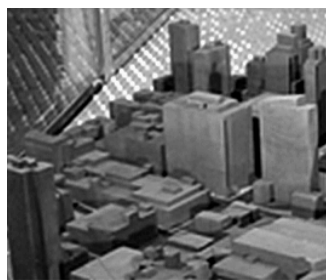
Ричак Наталія Львівна, кандидат географіч. наук, доцент, Інститут екології,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна
e-mail: rychak@ukr.net

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ШКВАЛЬНОГО ВІТРУ НА ТЕХНІЧНІ ТА РОСЛИННІ СТРУКТУРИ НА УРБАНІЗОВАНИХ ТЕРИТОРІЯХ

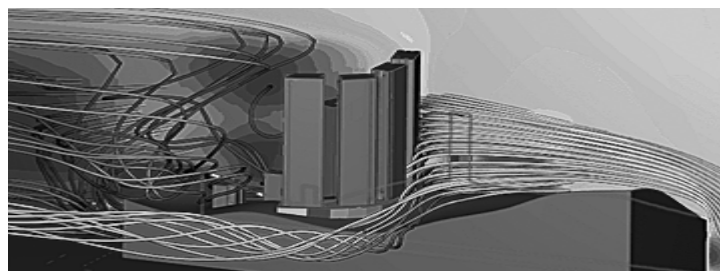
Кізілова Н.М., Ричак Н.Л.

Глобальні зміни клімату, які поступово відбуваються в останні роки за рахунок природних та антропогенних факторів, призвели до підвищення середньорічної температури атмосфери, випаровування води з океанів, змін температури і солоності річок, озер, морів, прискорення танення глетчерів Антарктиди і Гренландії. Це викликає раптові зміни температури, швидкості вітру, кількості опадів, негативно впливає як на здоров'я людини, так і на існування цілих видів тварин і рослин, які не пристосовані до нових природних умов [1]. Значну роль у прогнозуванні несприятливих атмосферних явищ та розробці мір їх попередження грає математичне моделювання як на рівні локальних територій і річкових систем [2], так і на рівні країн, земель, материків [1].

В роботі наведений стислий огляд математичних моделей течій рідини і повітря (environmental flows, environmental engineering), а також результати чисельних розрахунків впливу шквального вітру на деякі технічні споруди і масиви дерев, які виконані для конкретних ділянок на території м. Харкова на основі сервісу GoogleEarth (Рис.1а).



а



б

Рис.1. Приклад 3D структури житлових будинків (а) і результати чисельних розрахунків (б).

Чисельні розрахунки виконані в пакеті прикладних програм AnSys2021R1 (академічна версія) з використанням моделі турбулентної течії повітря ($k-\omega$ SST модель). Проведена візуалізація ліній току (Рис.1б) і облічені нормальні і зсувні сили, які діють на кожний будинок в моделі. Порівняння режимів руху зі швидкостями потоку $v_\infty = 2-20$ м/с. Оцінено можливості пошкодження/руйнування будинків. Показано, що додаткові бетонні загородження (споруда в лівій частині Рис.1б) і/або рослинні смуги дозволяють змінити напрямок вітру поблизу будинків (Рис.1б) і, таким чином, зменшити шкідливі наслідки.

1. John A. How to incorporate climate change into modelling environmental water outcomes: a review / A. John, R. Nathan, A. Horne, et al. // J. Water&Climate Change. – 2020. – Vol.11 (2). – P. 327–340. doi: 10.2166/wcc.2020.263

2. Кізілова Н.М. Інформаційне супроводження системи менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях / Н.М. Кізілова, Н.Л. Ричак // Системи обробки інформації. – 2020. – №4(163). – С.37-47. doi: 10.30748/soi.2020.163.04

Клімчук Тарас Володимирович, кандидат фізико-математичних наук
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 e-mail: tarasyniv@ukr.net
 Острик Володимир Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор
 Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна
 e-mail: ostrik_v@rambler.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛІВ МАКСИМАЛЬНИХ ДОТИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ В ПЕРІОДИЧНІЙ ЗАДАЧІ КАТТАНЕО – МІНДЛІНА

Клімчук Т. В., Острик В. І.

Контакт зі зчепленням і проковзуванням пружних тіл з однакового матеріалу, вперше розглянутий Каттанео [1] і Міндліном [2] незалежно одним від одного, зазвичай називають задачею Каттанео – Міндліна [3]. У двовимірному випадку цієї задачі мова йде про контакт пружних циліндричних тіл в умовах плоскої деформації.

Розглядається контактна взаємодія між двома пружними циліндричними тілами з l -періодичними вздовж осі Ox поверхнями, що попередньо дотикаються уздовж ліній $x = kl$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) та задаються рівняннями $y = -B_1(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1)$, $y = B_2(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1)$ ($B_1 > 0$, $B_2 > 0$). Пружні сталі G та ν (G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона) є однаковими для двох циліндричних тіл. У цьому варіанті періодичної задачі Каттанео – Міндліна тіла стискаються під дією на нескінченності нормальних напружень інтенсивності p_∞ з утворенням областей контакту $-a + kl \leq x \leq a + kl$, після чого на нескінченності прикладаються дотичні напруження інтенсивності q_∞ і області контакту поділяються на зони зчеплення $-c + kl \leq x \leq c + kl$ та зони проковзування $c + kl < |x| \leq a + kl$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). У зонах зчеплення граничні точки циліндричних тіл мають однакові тангенціальні переміщення, а у зонах проковзування дотичні та нормальні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона, тобто є пропорційними з коефіцієнтом тертя μ_0 .

Напруження у півплощині $y \geq 0$ (верхнє циліндричне тіло) знайдено за формулами Колосова [4], в яких аналітична функція $\Phi(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ (потенціал Колосова – Мусхелішвілі) має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{1}{2il} \int_{-a}^a [p(s) - iq(s)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(s - z) ds, \quad (1)$$

$$p(s) - iq(s) = \begin{cases} (1 - i\mu_0)p(s) - iq_0(s), & -c \leq s \leq c, \\ (1 - i\mu_0)p(s), & -a \leq s < -c, \quad c < s \leq a, \end{cases}$$

де функції $p(s)$ та $q(s)$ – l -періодичні безрозмірні функції відповідно нормальних та дотичних контактних зусиль.

1. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi / C. Cattaneo // Rendiconti dell' Accademia nazionale dei Lincei. – 1938. – 27. – P. 474 – 478.
2. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact / R. D. Mindlin // Trans. ASME, Series E, J. Appl. Mech. – 1949. – 16. – P. 259 – 268.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.

Кобзар Юрій Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник,
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна
 e-mail: creep@inmech.kiev.ua

РУЙНУВАННЯ СТЕРЖНЯ ВНАСЛІДОК ВТОМИ ЗА УМОВ БАГАТОЦИКЛОВОГО СИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ

Кобзар Ю.М.

Стержень з відомими фізико-механічними властивостями знаходиться під дією симетричного крутильного моменту M , з амплітудним значенням $M_{aK} = const$. Початкові напруження $\tau_0 = \frac{M_{aK}}{\pi R_0^3}$ менше межі $\sigma_{mц}$ пропорційності. Циклічні дотичні напруження $\tau(i) = \tau_a(i) \sin \Omega t$, де $\tau_a(i) = M_{aK} / W_p(i)$; $W_p(i)$ - амплітудне значення полярного моменту опору поперечного перетину стержня, які виникають в стержні з початковим об'ємом $V_1 = m_1 / \rho_1$ і викликають на довільному i -тому циклі стиск в $j=1,3$ та розтяг в $j=2,4$ чвертях. Прийнято, що зовнішнє амплітудне значення руйнуючого моменту є $M_{\epsilon} = \frac{m \tau_{\epsilon} \omega_0}{L \sqrt{2G_2(0)\rho}}$, а енергія руйнування $U_0 = \frac{1}{2} \frac{M_{\epsilon}^2 L^2}{m \omega_0^2}$. Рекурентний процес накопичення пошкоджень внаслідок втоми в першій чверті $j=1$ довільного i -того циклу при стисковій проти годинникової стрілки відбувається за умов, що довжина L та щільність $\rho_4(i-1) = \rho_1(i)$ не змінюються [1]. Баланс енергій має вигляд

$$U(i) = \frac{1}{2} \frac{M_{aK}^2 L^2}{m_1(i) \omega_0^2} = \frac{(\tau_{a1}(i))^2}{4G_1(i)} \frac{m_1(i)}{\rho_1(i)}. \quad (1)$$

Зв'язують стан стержня в чвертях, першій циклу i та четвертій циклу $i-1$ рівності

$$1 = \frac{\rho_4(i-1) \pi (R_4(i-1))^2 L}{m_4(i-1)} = \frac{\rho_1(i) \pi (R_1(i))^2 L}{m_1(i)}, \quad (2)$$

де невідомі $m_1(i)$ - несуча маса стержня; $R_1(i)$ - його радіус. З балансу енергій (1), рівнянь (2), рівності відношень мас та радіусів, виразу максимального амплітудного напруження, виразу відношень радіусів через напруження, кут зсуву попереднього циклу визначено відношення невідомого початкового радіусу до відомого попереднього. Через відношення радіусів визначають модуль зсуву, кут зсуву, масу, напруження, які стають початковими для наступної чверті цього циклу. В наступній $j=2$ чверті циклу при крученні проти годинникової стрілки стержень розтягується його маса, довжина та модуль зсуву не змінюються, але змінюються щільність та об'єм. Стан стержня на цій чверті циклу зв'язують рівності аналогічні (2), з їх допомогою знаходиться залежність між $\rho_2(i)$ - невідомою щільністю та радіусами. Далі аналогічно знаходяться нові радіус, кут зсуву, напругу та щільність, які стають початковими даними для наступної чверті циклу. Циклічна довговічність $N(i)$ досягається, коли для якогось i циклу $U(i) > U_0$.

1. Кобзар Ю.М. Модель руйнування гладких циліндричних стрижнів при багатоцикловому симетричному крученні/Ю.М. Кобзар// Матеріали XXI МНТК „Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”.-Київ: ММІ НТУУ «КПІ» ім. І. Сікорського, 6-9 жовтня 2020 року.-С.44-47.

Коломійчук Олег Петрович, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут математики НАН України, Київ, вул. Терещінківська 3, Україна
 e-mail: o.kolomiichuk@gmail.com;

АДАПТИВНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ З ШУМОМ НА ВХОДІ ЗІ ЗБУРЕНОЮ КОСОСИМЕТРИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ КОЕФІЦІЄНТІВ

Коломійчук О.П.

Рух повністю керованого гіроскопічного об'єкта з шумом на вході, описується наступною системою рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_0 + \varepsilon A_1)x + Bu, \\ y &= x + f,\end{aligned}\tag{1}$$

де $x = [x_1, \dots, x_{2n}]^T$ - n вимірний вектор стану, $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ - m вимірний вектор керувань, $y = [y_1, \dots, y_l]^T$ - l вимірний вектор виходу, ε малий параметр; $A_0 \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$, $A_0 = -A_0^T$ - кососиметрична невинроджена матриця, $A_1 \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$ - матриця збурення, $B \in \mathbb{R}_{2n \times m}$ - матриця при керуванні, $f \in \mathbb{R}_l$ - шум. Елементи матриць A_0 , A_1 , B та C всі, або частково є невідомими.

В роботі після відновлення невідомих матриць регулятора методом інваріантного занурення [1], для гіроскопічної системи (1), застосовується алгоритм [2] побудови оптимального керування, який ґрунтується на другому методі Ляпунова. Запропонований підхід буде адаптивне керування [3], для системи (1) з невідомими параметрами. За допомогою (1) описуються реальні керовані гіроскопічні системи. Гіроскопічна система має особливу форму, це дає можливість отримати значні спрощення при побудові регулятора. В роботі наведені алгоритми, які в аналітичному вигляді дають можливість отримати закон керування, а також ідентифікувати невідомі матриці коефіцієнтів.

1. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – перевод с англ., «Мир» 1979.
2. Новицький В.В., Хуан Чень. Оптимальное управление почти консервативными системами / В.В. Новицкий, Хуан Чень // зб. Праць Інституту математики НАН України. – 2004. Т.1, – №2. – С.152-157.
3. Тертичний-Даурі В.Ю. Адаптивная механика – М.: Наука, 1998. – 480С.

Коновалюк Тетяна Петрівна, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: tpk_8_4@ukr.net;

Краснопольська Тетяна Сігізмундовна, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl;

Печук Євген Дмитрович, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: evgdmp@gmail.com

ВПЛИВ ВНУТРІШНЬОЇ ДИНАМІКИ КОГЕРЕНТНИХ ВИХРОВИХ СТРУКТУР, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ МІЖ СОБОЮ, НА ГЕНЕРОВАНЕ ЗВУКОВЕ ПОЛЕ

Коновалюк Т.П., Краснопольська Т.С., Печук Є.Д.

На прикладах взаємодії декількох когерентних вихрових структур показано, що неврахування внутрішніх ступенів вільності вихорів при моделюванні течії суттєво впливає на розрахунки генерованого звукового поля, яке є результатом вихрової взаємодії.

Виконано розрахунки звукових полів, що є результатом взаємодії декількох когерентних вихрових структур. Вихрова взаємодія описується в межах моментної моделі (MZS-модель) першого та другого порядків [1]. В MZS-моделі першого порядку вихорі описуються вихровими точками, в MZS-моделі другого порядку -- вихорами Кірхгофа. Звукові поля обчислюються в межах акустичної аналогії Лайтхила в формулюванні Пауела [2]. Розглядаються лише пружні вихрові взаємодії, що відповідає основним припущенням загальної MZS-моделі щодо течії. Це дозволяє виділити характерні смуги в звуковому спектрі. Показано, що в спектрі звукового поля при описі вихрових плям точковими вихорами (MZS-модель першого порядку) присутня лише одна частотна смуга, яка відтворює рух центрів завихреності плям (великомасштабні вихрові рухи). Врахування внутрішньої динаміки вихорів (перехід від точкового до еліптичного опису вихора) в MZS-моделі другого порядку призводить до появи більш високочастотної смуги в звуковому спектрі. Аналіз результатів дозволив з'ясувати, що ця смуга в звуковому спектрі формується переважно подвоєними частотами обертання еліпсів та частотами коливань їхньої форми.

Показано, що великомасштабні рухи вихрових плям можна моделювати точковими вихорами за умови, коли звуковий спектр розподілений на смуги та низькочастотні смуги точкових та розподілених вихорів мають близьку ширину. Неврахування внутрішньої вихрової динаміки при описі звукового джерела веде до суттєвого заниження рівня очікуваного звукового поля. Оскільки внутрішня вихрова динаміка значним чином впливає на рівень генерованого звуку, компенсувати цей фактор можна, зокрема, зменшенням ексцентриситету вихорів, що формують течію.

1. Melander M.V. A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Part I. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation./ M.V.Melander, N.J. Zabuzky, A.S. Styczek A.S.// *J. Fluid Mech* --. 1986.-- Vol.167.-- P.95-115.

2. Powell A. Theory of vortex sound./A. Powell // *J. Acoust.Soc.Am.* -- 1964. -- Vol.36, No.1.-- P.177-195.

Котов Тарас Олександрович, аспірант,
 Інститут математики НАН України, Київ, Україна
 e-mail: taras.kotov@gmail.com
 Мазко Олексій Григорович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: mazkoag@gmail.com

ЗВАЖЕНА ОЦІНКА ТА МІНІМІЗАЦІЯ ВПЛИВУ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Котов Т. О., Мазко О. Г.

Досліджується лінійна диференціально-алгебраїчна (дескрипторна) система керування

$$E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u,$$

де $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^s, z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ – вектори відповідно стану, керування, зовнішніх (екзогенних) збурень, керованого і спостережуваного виходів, причому $\text{rank } E = \rho \leq n$. Матричні коефіцієнти A, B_1, C_1 і D_{11} можуть бути поліедрально невизначеними, тобто

$$A \in Co\{A_1, \dots, A_\alpha\}, \quad B_1 \in Co\{B_{11}, \dots, B_{1\beta}\}, \quad C_1 \in Co\{C_{11}, \dots, C_{1\gamma}\}, \quad D_{11} \in Co\{D_{111}, \dots, D_{11\delta}\},$$

де A_i, B_{1j}, C_{1t} і $D_{11\tau}$ – вершини заданих політопів у відповідних матричних просторах. Задача полягає у пошуку законів керування, при яких замкнена система є *регулярною, стійкою, неімпульсною* і для неї виконується задана оцінка $J < \gamma$ інтегрального критерію якості [1]

$$J = \sup_{(w, x_0) \in \mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \quad \|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^T Q z dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w dt,$$

де $P = P^T > 0, Q = Q^T > 0, X_0 = E^T H E \geq 0$ – вагові матриці, $\mathcal{W}$ – множина пар (w, x_0) , для яких $0 < \|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty$ і дана система має розв'язок. Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх збурень і початкових збурень в системі, обумовлених ненульовим початковим вектором x_0 . Закони керування, які мінімізують функціонал J , називаються *J-оптимальними*. За допомогою вагових коефіцієнтів P, Q і X_0 можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування.

Встановлено умови існування статичних регуляторів за станом та виходом $u = Ky$, а також динамічних регуляторів (компенсаторів) з нульовим початковим станом, які розв'язують поставлену задачу [2,3]. Розроблено алгоритми синтезу таких регуляторів, в основу яких покладено розв'язування систем лінійних та квадратичних матричних нерівностей. Для ілюстрації отриманих результатів проведено чисельні експерименти із застосуванням комп'ютерних систем Matlab і PTC Mathcad Prime.

1. Мазко А.Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств. – Праці Інституту математики НАН України, Т. 102. – Київ, 2016. – 332 с.
2. Мазко О.Г., Котов Т.О. Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Укр. мат. журн. – 2019. – 71, № 10. – С. 1374 – 1388.
3. Мазко О.Г. Зважена оцінка і пониження рівня впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Укр. мат. журн. – 2020. – 72, № 11. – С. 1510 – 523.

Козлов Володимир Ілліч, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: thermo_imech@ukr.net;

Зінчук Любов Павлівна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: zinchuk_imech@ukr.net

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ТРИВИМІРНІ ТІЛА З В'ЯЗКОПРУЖНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАННЯХ

Козлов В.І., Зінчук Л.П.

У багатьох галузях сучасної техніки знаходять широке застосування шаруваті в'язкопружні п'єзоелектричні конструктивні елементи, що і зумовлює потребу у дослідженні їх термоелектромеханічної поведінки при гармонічних навантаженнях.

При вимушених резонансних коливаннях шаруватих елементів з в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів через можливі гістерезисні втрати в них має місце підвищення температури, так званої температури дисипативного розігріву. При досягненні цієї температурою точки деградації п'єзоелектричного матеріалу система керування коливаннями перестає виконувати своє функціональне призначення. Для п'єзоелектричного матеріалу точкою деградації є точка Кюрі, при якій матеріал втрачає п'єзоефект. Саме такий тип теплового руйнування і розглядається у даній роботі. При цьому виникають дві основні задачі: перша полягає у визначенні критичного значення амплітуди навантаження, при якому температура досягає точки Кюрі, а друга – у розрахунку критичного часу, при якому температура дисипативного розігріву досягає точки Кюрі при закритичному навантаженні.

Для розв'язування вказаних задач розроблено чисельну методику з використанням скінченно-елементного методу для тривимірних тіл, яка ґрунтується на варіаційному формулюванні зв'язаних задач електромеханіки при механічному і електричному навантаженнях і задачі нестационарної теплопровідності. Розв'язок отриманих варіаційних задач електров'язкопружності і нестационарної теплопровідності у декартовій системі координат знаходиться методом скінченних елементів з використанням тривимірних 24-х вузлових ізопараметричних елементів з квадратичною апроксимацією переміщень, електричного потенціалу і температури в елементі [1].

На основі розробленої методики розв'язано просторову задачу термоелектромеханіки для шестигранної призми. Досліджено вплив різних факторів (геометричних параметрів, фізико-механічних властивостей матеріалу, граничних умов) на величину критичного навантаження. Для шарнірно опертої прямокутної пластини отримано аналітичний розв'язок зв'язаної задачі електромеханіки з використанням класичної теорії Кірхгофа-Лява і уточненої теорії типу С.П.Тимошенка. Проведено порівняльний аналіз результатів розрахунків критичних параметрів з використанням оболонкових теорій і просторової постановки задачі для випадку тонких пластин. Встановлено суттєву розбіжність цих результатів для достатньо товстих пластин.

1. Karnaukhov V. Forced vibrations and dissipative heating of three-dimensional piezoelectric prism / V. Karnaukhov, V. Kozlov, V. Sichko, Y. Nykyforchyn // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2018. – № 4. – С. 104 – 111.

Krasnopol'skaya Tatyana Sigizmundovna, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Leading scientist,
Institute of Hydromechanics NASU, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

OPTIMIZATION OF MIXING IN THE STAGGERED HERRINGBONE MICROMIXER USING MELESHKO'S ANALYTICAL SOLUTION

Krasnopol'skaya T.S.

Our presentation is devoted to the analysis of mixing microfluids in the staggered herringbone microchannels with a rectangular cross-section and with a system of grooves on one of the surfaces of the channels [1-3]. For this purpose, a general technique for studying the flow of a viscous incompressible fluid in microchannels with a rectangular cross section is being constructed and a model representation of the flow in the Stokes approximation is being developed [4]. Three-dimensional, time-independent Stokes flow driven by a uniform pressure gradient in a rectangular microchannel is studied by the method of superposition. This method appears to be effective for solving mechanical problems concerning creeping flow of viscous fluid in a rectangular cavity by tangential velocities applied along its walls. The method is illustrated by several examples.

The technique is reduced by V.V. Meleshko [4] to solving the Stokes equations for the longitudinal component of the velocity (Poiseuille flow) and solving the biharmonic equation for the stream function of the transverse components of the flow velocity. An analytical solution is obtained by V.V. Meleshko [5] on the basis of the formulated correct mathematical problem of the flow of a viscous incompressible fluid in a rectangular microchannel. The solution of the biharmonic problem is represented as a superposition of solutions with symmetric and asymmetric distributions of the stream function along both coordinates of the channel cross section. Each solution is represented as an expansion in terms of its own functions. In addition, the analysis of the accuracy of the fulfillment of the boundary conditions on the surfaces of the microchannel is carried out. It is shown that taking into account the five terms of the analytical solution of biharmonic problems for the flow stream function in the channel cross section makes it possible to satisfy the boundary conditions with a maximum error not exceeding 0.1% with respect to the velocity of the boundaries.

The solutions obtained for the longitudinal and transverse components of the fluid flow velocity field in the region under consideration are used to analyze the results of mixing fluids under various initial conditions. Numerical modeling of the indicated process of advection of a passive fluid and comparison of the results obtained with the data of a real experiment allow us to conclude that the model representation is in good agreement with the real flow in the microchannel [3].

1. Stroock A. D. Chaotic mixer for microchannels. / A. D. Stroock, S. K.W. Dertinger, A. Ajdari, I. Mezić, H.A. Stone, G.M. Whitesides // *Science*. – 2002. – **295**. – P. 647–651.
2. Stone H. A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip. / H.A.Stone, A.D. Stroock, A. Ajdari // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2004. – **36**. – P. 381–411.
3. A.D. Stroock Patterning flows using grooved surfaces. / Stroock A. D., Dertinger S. K., Whitesides G. M., Ajdari A. // *Analyt. Chem.* – 2002. – **74**. – P. 5306–5312.
4. Meleshko V.V. Mixing of viscous fluid in rectangular microchannels / V.V. Meleshko, A.A. Gourjii, T.S. Krasnopol'skaya // *Hydromechanics and Acoustics*, 2018, **1(91)**, N2, P. 191 - 222.
5. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity/ V.V. Meleshko // *Proc. R. Soc. London*. – 1996. – **A452**. – P. 1999–2022.

Krushynska Anastasiia Olexandrivna, Dr., Assist. Prof.
Engineering and Technology Institute Groningen, Faculty of Science and Engineering,
University of Groningen, Groningen, the Netherlands
 e-mail: a.o.krushynska@rug.nl

IN MEMORY OF PROF. VIATCHESLAV V. MELESHKO (1951-2011): WAVEGUIDING OF ELASTIC WAVES IN SOLIDS

A.O. Krushynska

This talk is devoted to the 10th anniversary of the untimely tragic death of Prof. Viatcheslav V. Meleshko who was the scientific advisor of my M.Sc. and Ph.D. theses in 2004-2008.

The first part of the talk is devoted to the overview of Prof. V.V. Meleshko's works on the dynamics of stress waves in solids – the topic central to his Doctorate degree in Acoustics (1984) [1] and the one he continued to work on afterwards together with his PhD students [2,3]. In particular, he focused on analytical studies of a classic problem of wave propagation in elastic waveguides of non-canonical cross-section, e.g., rectangular waveguides. He developed and widely applied a computationally efficient and accurate method of superposition that provided indispensable insights into the structure of wave field, explained the formation of edge waves, and linked mathematical and engineering studies of this problem. Besides, this method can easily be extended to analyse coupled field problems, e.g., for thermo-elastic or piezoelectric waveguides.

The second part of the talk deals with my recent research on waveguiding of elastic waves in solids. My research interests in this field are two-fold. First, I aim at controlling the waveguiding in an elastic medium by modifying the geometry of constituent elements [4]. This approach relies on the concept of so-called phononic and elastic metamaterials – advanced materials with man-made architecture responsible for unusual effective dynamic and mechanical properties. Second, I study how guided waves can be influenced by the material properties of a constituent material [5]. For this purpose, I consider wave propagation and attenuation in a phononic medium made of a dissipative polymer. Depending on the governing viscoelastic mechanisms in the polymer and wave control mechanisms in the phononic structure, various dynamic effects can be expected. My research is mainly done by means of numerical (FEM) and experimental approaches, and would definitely benefit from the scientific intuition and fundamental insights of Prof. V.V. Meleshko if it could only be possible.

1. Meleshko V.V. Propagation of high-frequency longitudinal waves in a rectangular waveguide / V.V. Meleshko // *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainiskoi RSR. Seriya A. Fisiko-matematichni ta technichni nauki*, 2 – 1983. – P. 34-38.

2. Kastrzhitskaya E.V. Propagation of harmonic waves in an elastic rectangular waveguide / E.V. Kastrzhitskaya, V.V. Meleshko // *Sov. Appl. Mech.*, vol. 26 (8) – 1990.- P. 773-781.

3. Krushynska A.O. Normal waves in elastic bars of rectangular cross section / A.O. Krushynska, V.V. Meleshko // *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 129 (3) – 2011.- P. 1324-1335.

4. Krushynska A.O. Arbitrary-curved waveguiding and broadband attenuation in additively manufactured lattice phononic media / A.O. Krushynska, N. Aneer, M.A. Badillo-Ávila, M. Stokroos, M. Acuatla // *Mater. & Design*, vol. 205 – 2021.- P. 109714.

5. Krushynska A.O. Dissipative dynamics of polymer phononic materials / A.O. Krushynska, A.S. Gliozzi, A. Fina, D. Krushinsky, D. Battegazzore, M.A. Badillo-Ávila, M. Acuatla, S. Stassi, C. Noè, M. Scalerandi, N.M. Pugno, F. Bosia // *Adv. Funct. Mater.* – 2021.- accepted.

Кундрат Микола Михайлович, доктор техн. наук, професор,
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна,
 e-mail: kundrat@i.ua

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ТІЛА З ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Кундрат М.М.

Поля напружень і переміщень біля вершин включень та їх асимптотичні подання досліджувалися в широкому колі праць, найбільш повно їх огляд подано в монографії Г.Т. Сулима [1]. Зародження тріщин в околах вершин включень проходить у зоні гранично високих для матеріалу напружень, тому безпосередньо руйнуванню передують області матеріалу з нелінійними властивостями, в яких відбувається розшарування матеріалу, утворення тріщин “срібла” (полімери), пластичне течіння (метали). За експериментальними даними руйнування композитів у матеріалах з пластичною матрицею дотичні напруження на поверхні розділу збільшуються до значень, при яких у матриці чи на поверхні розділу виникає пластична деформація. Це значення залишається сталим на деякій ділянці, поки волокну не буде передана більша частина навантаження.

За умов плоскої задачі термопружності розглядаємо однорідне ізотропне тіло, що містить нагріте до температури T жорстке лінійне включення завдовжки $2a$. Тепловий контакт між включенням та матрицею ідеальний. Міцність матеріалу межі матриця-включення вважаємо не меншою від міцності матриці. На площину діють рівномірно розподілені на нескінченності сталі напруження $\sigma_{xx}^{\infty} = q$. Аналіз напруженого стану такої композиції за пружним розв’язком [1] свідчить, що максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ мають місце в околах кінців включення уздовж його межі з пластиною. Вважаємо, що саме тут і зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини уздовж межі матриця-включення, і складаються [2] з двох частин: спричиненого високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати вищий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень в околах вершин включення, отримавши природним чином в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження.

Крім термопружних сталих закону Гука розрахункова модель локальної міцності тіла з лінійним включенням описується ще трьома характеристиками: адгезійною зсувною міцністю контактної межі матриця-включення – τ_s^* , граничним значенням переміщень δ_{2c} та міцністю включення на розрив P_{ut} . І за фіксованої довжини включення або розривається, або відшаровується від матриці залежно від того, яка із критеріальних умов ($u(a) = \delta_{2c}$ чи $P_{\max} = P_{ut}$) досягається раніше. Найменше значення навантаження, при досягненні якого реалізується хоча б одна зі згаданих умов, називаємо граничним навантаженням.

Аналітичний розв’язок задачі отримано з використанням комплексних потенціалів М.І. Мусхелішвілі шляхом зведення до задачі спряження.

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Kundrat M.M. Working length of a high-modulus linear inclusion under the action of concentrated cyclic forces within the framework of plane problem // Materials Science. – 2016.– V. 52, № 1. – P. 72-82.

Курилко Олександр Борисович, кандидат фіз.-мат. наук,
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ПРЯМОКУТНІЙ ПОРОЖНИНІ ПРИ СТАЛИХ ДОТИЧНИХ ШВИДКОСТЯХ

Курилко О. Б.

Задача про змішування ламінарними течіями в'язких рідин важлива в мікротехнологіях при розробці відповідних приладів в хімічній промисловості та мікробіології. Зацікавленість дослідників в цій проблемі виникла не тільки через поширеність явища змішування в природі, але й можливості застосування різних технологій змішування в промисловості і техніці (гідродинаміка, океанологія, біологія, хімія). Дослідження умов нестійких хімічних реакцій потребує створення спеціальних мікрохімічних процесів, які підтримують хімічні реакції у вузькому діапазоні фізичних параметрів. Вони здатні змішувати високомолекулярні сполуки в рідині, молекули яких не можуть протидіяти великим напруженням. Великий інтерес дослідників в області змішування в'язких рідин пов'язаний також із необхідністю створення цілого програмного комплексу, який дозволяє кількісно і якісно моделювати широкий клас процесів змішування в'язких рідин. Такий комплекс має включати потужний математичний апарат, за допомогою якого отримується аналітичний розв'язок задачі про течію в'язкої рідини в замкненій області, та сучасні чисельні методи, які дозволяють змоделювати процес адвекції виділених об'ємів рідини з високою точністю.

В роботі Оттіно [1] експериментальним шляхом отримані результати, у вигляді картинок, що демонструють характер змішування в'язкої рідини в прямокутній порожнині для різних значень швидкостей, що прикладені до рухомих стінок. Привертає увагу досить простий протокол перемішування, що базується на періодичних рухах верхньої та нижньої стінок прямокутної порожнини при сталих швидкостях. В роботі [2] отримані певні результати стосовно моделювання вищезазначеного процесу змішування за допомогою техніки перерізу Пуанкаре та дослідження деформації плями рідини з границею, утвореною відрізками многовидів.

Доповідь присвячена чисельному моделюванню процесу змішування виділеного об'єму в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини при сталих періодичних рухах верхньої та нижньої стінок. Таке моделювання зводиться до послідовного розв'язання двох задач, перша з яких є стаціонарною бігармонічною задачею, на основі розв'язку якої знаходяться кінематичні характеристики потоку. В якості методу розв'язання такої задачі було обрано метод суперпозиції. Друга задача є нестаціонарною та полягає в дослідженні адвекції контуру, що складається з пасивних рідких частинок, у вже відомому полі швидкостей. Для вирішення другої задачі було обрано методику, розроблену професором Гуржієм О.А., яка базується на методі кускової сплайн-інтерполяції [3]. Отримані чисельні результати добре узгоджуються з експериментом, проведеним Оттіно [1].

1. Ottino J. M. Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity // Journal of Fluid Mechanics – 1989. – Vol.209. – P.463-499.

2. Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, №1. – С. 43-52.

3. Гуржій О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кускової сплайн інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доповіді НАН України. – 1996. – N8. – с.54-62.

Кушнір Роман Михайлович, доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
 e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua

Токовий Юрій Владиславович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
 e-mail: tokovyuy@gmail.com

ПРУЖНА РІВНОВАГА ТІЛ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ: КУТИ «У КУТІ»

Кушнір Р.М., Токовий Ю.В.

Дослідження пружної поведінки обмежених тіл з кутовими точками упродовж століть залишається важливою та актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла. Цікавість до цієї проблеми періодично загострюється з появою нових викликів, що не вичерпуються лише класичним формулюванням відповідних задач механіки, але й сучасними тенденціями прикладної науки, зокрема, потребою уточненого термомеханічного аналізу мініатюризованих технічних систем (наприклад, елементів електронних пристроїв, давачів, випромінювачів тощо) з урахуванням розмірних ефектів. Зважаючи на кінцеву мету досліджень, використання сучасних числових методів не завжди виявляється цілком достатнім інструментом якісного аналізу задач такого класу, що спонукає до певного «переосмислення» класичних та напрацювання нових аналітичних підходів стосовно можливості їх використання у синергії з обчислювальними потужностями.

Розроблення аналітичних методів розв'язування задач теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками є предметом інтенсивних досліджень багатьох наукових шкіл. Суттєвою складністю при цьому виявляється побудова загальних розв'язків задач такого класу, які б дозволили одночасно задовольнити вихідні рівняння та повні набори крайових умов, заданих на усіх гранях досліджуваного тіла. Для подолання цього ускладнення розроблено низку наближених аналітичних підходів, які, у переважній більшості, ґрунтуються на реалізації двох основних стратегій: точне задоволення ключових гармонічних або бігармонічних рівнянь шляхом використання загального подання відповідних потенціальних функцій за наближеного задоволення межових умов (наприклад, метод перехресної суперпозиції, метод однорідних розв'язків), або ж забезпечення точного виконання умов на межі за наближеного задоволення ключових рівнянь (наприклад, метод безпосереднього інтегрування). Застосування кожної зі стратегій має певні переваги, наприклад щодо форми подання розв'язку, що з огляду на поставлену загальну мету дослідження визначає вибір методу.

Розробка методів розв'язування статичних та динамічних задач механіки для тіл з кутовими точками становить значну частину наукового спадку представника Київської наукової школи механіки і термомеханіки професора В'ячеслава Володимировича Мелешка. У доповіді висвітлено окремі результати цих досліджень на фоні розвитку методології подання загальних розв'язків дво- та тривимірних задач теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками.

Куценко Олексій Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
 Харитонов Олексій Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
 e-mail: alex_kutz@ukr.net

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ЗМІННОМУ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛООБМІНУ

Куценко О.Г., Харитонов О.М.

Сучасні інженерні розрахунки задач термopужності проводяться за допомогою добре апробованих пакетів скінченних елементів, здатних відшукати нестационарні поля температур та напружень в тілах довільної форми та з урахуванням залежності властивостей їх матеріалів від самої температури. Проте аналітичні розв'язки залишають за собою простір реалізації у вигляді еталонів за якими проводиться верифікація чисельних пакетів та засобів попереднього аналізу — аналізу в першому наближенні. Останнє дозволяє суттєво скоротити час обчислень за рахунок обґрунтованого відкидання некритичних сценаріїв температурного навантаження.

В даній роботі наведено алгоритм розв'язку осесиметричної задачі теплообміну для двошарового порожнинного циліндра, на внутрішній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем, температура якого змінюється в часі. Коефіцієнт теплообміну також вважається змінним у часі, зовнішня поверхня циліндра — теплоізовованою. Також припускається, що середній радіус циліндра є значно більший за товщину його стінки. Алгоритм побудований на аналітичному розв'язку аналогічної задачі з постійним коефіцієнтом теплообміну [1]. Вказаний розв'язок доповнений розв'язком задачі з неоднорідним початковим полем температури в циліндрі та нульовою температурою зовнішнього середовища. Сукупність цих двох розв'язків дозволило на основі інкрементного підходу розвинути вищезгаданий алгоритм. Розв'язок задачі теплопровідності доповнений відомими [2] виразами для колових та поздовжніх температурних напружень та напружень, викликаних внутрішнім тиском, в двошаровому циліндрі.

В роботі проведені порівняльні розрахунки для обраного сценарію термошока для корпусу ядерного водо-водяного реактора. Оцінено вплив різних факторів: неврахування температурозалежності матеріалів, стрибкоподібного характеру зміни значень коефіцієнта теплообміну, неврахування кривини циліндра при розв'язанні задачі теплопровідності на величину похибки розв'язку. Встановлено, що сукупна похибка, викликана всіма цими факторами, складає біля 5%. Таким чином, запропонований алгоритм дозволяє проводити швидкий аналіз полів температурних напружень і обґрунтовано розділяти сценарії на небезпечні та неважливі без попередньої побудови скінченно-елементної моделі. В роботі також вказано, як на основі запропонованого алгоритму, можна побудувати процедуру швидкої оцінки тріщиностійкості корпусу, що не вимагає безпосереднього використання методу скінченних елементів при її проведенні.

1. Kadenko I. An Analytical Approach to the Generation of the Operational Limit Curves with NDE-based Crack Postulation / I. Kadenko, N. Sakhno, O. Kutzenko, O. Kharytonov // 8th Intl. Conf. on NDE in Relation to Structural Integrity for Nuclear and Pressurised Components, 29th September 29 – October 1, Berlin, Germany: proceedings, — 2010, — P. 234-242.

2. Kutsenko O. An analytical basis for the generation of NPP emergency operation limiting pressure-temperature curves / O. Kutsenko, I. Kadenko, O. Kharytonov, N. Sakhno // Mathematical Modeling And Computing, Vol. 3, №1, — 2016. — P. 79–89.

Куценко Олексій Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
 Харитоновна Леся Василівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний транспортний університет, Київ, Україна;
 Куценко Анастасія Григорівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна;
 e-mail: alex_kutz@ukr.net

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРФОРОВАНИХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Куценко О.Г., Харитоновна Л.В., Куценко А.Г.

При проведенні практичних розрахунків конструкцій на міцність доводиться мати справу з періодично перфорованими в двох напрямках тонкостінними елементами. При цьому часто виникає проблема обчислювального характеру, адже безпосереднє моделювання таких елементів ставить високі вимоги до об'єму пам'яті та швидкодії обчислювальних засобів. Для подолання вказаної проблеми вдаються до заміни перфорованої області однорідною областю з еквівалентними пружними характеристиками. Розрахунок еквівалентних пружних характеристик становить складну математичну проблему, яка вирішується шляхом застосування двоякоперіодичних еліптичних функцій [1]. Відомі з літератури аналітичні співвідношення для еквівалентних характеристик виражаються у вигляді рівнянь, що утримують ряди, а тому їх використання при проведенні інженерних розрахунків викликає певні труднощі. З іншого боку, на сьогоднішній день при проведенні розрахунків у руках інженера є потужний метод розв'язання задач теорії пружності у вигляді одного з сучасних пакетів методу скінченних елементів. За допомогою такого пакету задачу знаходження еквівалентних характеристик можна розв'язати відносно просто. В даній роботі запропонований один з можливих способів вирішення вказаної проблеми.

Загальну задачу одновісного розтягу двоякоперіодично-перфорованої пластини в довільному напрямку на основі принципу суперпозиції можна розкласти на дві задачі розтягу вздовж періодів або на суму задач про усесторонній розтяг та розтяг вздовж одного з двох напрямків періодичності. Кожна з вказаних підзадач може бути зведена до граничної задачі для одного періоду пластини. Постановка та розв'язання задачі, що відповідає усесторонньому розтягу, не представляє жодних труднощів. Розв'язок же задачі про одновісний розтяг вздовж напрямку періодичності спряжений з певною неоднозначністю, адже для перфорованої пластини невідома наперед деформація в поперечному напрямку, тобто еквівалентний коефіцієнт Пуасона. Він якраз є однією з характеристик, які необхідно визначити. В даній роботі запропоновано визначати поперечну деформацію перфорованої пластини на основі теореми про мінімум потенціальної енергії. Вказаний підхід є універсальним і дозволяє знаходити поперечну деформацію пластин з трикутною, чотирикутною та будь-якою іншою двояко періодичною перфорацією. Він просто реалізується за допомогою універсальних методів типу методу скінченних елементів чи методу граничних елементів і тому здатний допомогти інженерам у вирішенні питання підбору еквівалентних пружних характеристик двоякоперіодичних неоднорідних пластин чи оболонок. В роботі виконані розрахунки скінченно-елементним комплексом CalculiX для пластин з декількома типами перфорації та проведено порівняння їх результатів з відомими з літератури аналітичними результатами.

1. Григолюк Э.И. Перфорированные пластины и оболочки / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский, — Москва: Наука, 1970. — 556 с.

Лагодзінський Олександр Євгенійович, аспірант

Інститут Математики НАН, Київ, Україна.

e-mail: lagodzinskyi@gmail.com

Тимоха Олександр Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, член-кореспондент НАН України,

Інститут математики НАН України, Київ, Україна.

e-mail: atimokha@gmail.com

РЕЗОНАНСНІ ТРИВИМІРНІ УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В КОНТЕЙНЕРІ КВАДРАТНОГО ПЕРЕРІЗУ ДЛЯ ДОВІЛЬНИХ ПЕРІОДИЧНИХ НЕПАРАМЕТРИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Лагодзінський О.Є., Тимоха О.М.

Розглядаються резонансні хвилі на поверхні ідеальної нестисливої рідини (безвихорові рухи), яка частково заповнює контейнер квадратного перерізу, що виконує періодичний рух з малою амплітудою й частотою, близькою до найнижчої власної частоти коливань рідини. Нелінійна модальна система типу Наріманова-Моїсєєва, яка здатна ефективно описувати ці хвилі, була виведена в [1]. Були побудовані та проаналізовані асимптотичні періодичні розв'язки системи. Це дало можливість класифікувати резонансні усталені хвилі та їх стійкість для гармонічного зворотно-поступального (подовжнього, діагонального та косого) збурень. Результати були підтримані експериментальними спостереженнями та вимірами.

Базуючись на недавніх аналітичних результатах авторів [2], класифікуються усталені тривимірні резонансні хвилі для випадку довільних тривимірних непараметричних циклічних рухів контейнера. Це стає можливим після доведення асимптотичної еквівалентності відповідних періодичних розв'язків модальної системи тим, що виникають для горизонтальних поступальних еліптичних збурень. Як наслідок, резонансні стаціонарні хвилі та їх стійкість можна розглядати як функції кутового положення, співвідношення осей і напрямку (проти або за годинникову стрілку) цих еліптичних збурень (орбіт). Кругова орбіта спричиняє стійкі кругові хвилі (співнаправлені з орбітою), але може також збуджувати стійкі майже стоячі хвилі. Напрямок орбіти збурення не впливає на амплітудно-частотні характеристики для симетричного (канонічного) та діагонального положення орбіти. Цей факт не виконується для еліптичного збурення косого типу. Коли співвідношенні осей еліпсу збурення змінюється від 0 до 1, амплітудно-частотні характеристики виявляють дивовижні метаморфози, що суттєво впливають на діапазони частот стійких майже стоячих/кругових хвиль та „нерегулярного” хлюпання (хаосу). Для експериментальних вхідних даних [3], зустрічно-спрямована кругова хвиля зникає, коли відношення осей еліпсу перевищує 0,5, але діапазон частот нерегулярних хвиль зникає, коли це співвідношення перевищує на 0,75.

1. Faltinsen O.M., Rognebakke O., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin / O.M. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – 487. – P. 1-42.

2. Faltinsen O.M., Lagodzinskyi O., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric forcing / O.M. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – 894, A10. – P. 1-42.

3. Ikeda T., Ibrahim R.A., Harata Y., Kuriyama T. Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitations / T. Ikeda // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2012. — 700.—304-328.

Ловейкін Андрій Вячеславович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
 e-mail: anlov@i.ua

ОСОБЛИВІСТЬ ПОТЕНЦІАЛЬНОГО ПОЛЯ У ВЕРШИНІ ЧОТИРИЛОПАТЕВОГО СИМЕТРИЧНОГО ВІСТРЯ

Ловейкін А.В.

При оцінці розподілу різноманітних фізичних і механічних полів важливу роль відіграє вміння визначати особливість їх поведінки при наближенні до нерегулярних точок, що є на межі області. Особливо це питання залишається актуальним при розгляді просторових задач.

В даній роботі вивчається особливість розподілу потенціального поля, наприклад, електростатичного поля, в околі вершини чотирилопатевого, симетричного вістря, лопаті якого взаємно-перпендикулярні і мають форму секторіальних (клиноподібних) пластин зі спільним вертикальним ребром та кутом розхилу α , $0 < \alpha \leq \pi/2$. Основна мета – визначити особливість поведінки поля у вершині вістря. Для цього будуються однорідні розв'язки задачі. Якщо лопаті вістря розташовувати площинах Oxz та Oyz , то задача буде симетричною за координатами x та y і її розв'язок достатньо побудувати при $x > 0, y > 0$. В сферичних координатах (ρ, θ, φ) парні за x та y однорідні розв'язки визначаються з крайової задачі зі змішаними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \\ u|_{\varphi=0} &= 0, \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < \alpha, \quad \partial u / \partial \varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad \rho > 0, \quad \alpha < \theta < \pi, \\ u|_{\varphi=\pi/2} &= 0, \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < \alpha, \quad \partial u / \partial \varphi|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad \rho > 0, \quad \alpha < \theta < \pi. \end{aligned} \quad (1)$$

Для розв'язання (1) використано інтегральне перетворення типу Мелера-Фока [1] за координатою θ . Оскільки змішані крайові умови задані як при $\varphi = 0$, так і при $\varphi = \pi/2$, то задача зведена до системи функціональних рівнянь типу Вінера-Гопфа [2]. Остання, після перетворень, розпалась на два незалежних рівняння, кожне з яких за допомогою методу Вінера-Гопфа [2] зведене до однорідної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Визначивши, коли отримані однорідні системи мають нетривіальні розв'язки, знайдені особливості поведінки потенціального поля у вершині вістря в залежності від кута α розхилу ребер лопатей. Зокрема, для нормальної похідної на лопаті має місце асимптотична рівність

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} \sim K(\theta) \rho^\gamma, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (2)$$

де $\theta \in (0, \alpha)$ — фіксоване. Значення показника особливості γ залежать від кута α . Отримані результати показали, що при $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\alpha_0 \approx 0,36892\pi$, особливість у вершині сильніша за класичну кореневу особливість, що має місце на ребрах лопатей. Якщо ж кут $\alpha \in (\alpha_0, \pi/2]$, то особливість у вершині слабша за особливість на ребрах.

1. Парфененко Д.Н. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости / Парфененко Д.Н., Улитко А.Ф. // Доклады АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1988. — № 11. — С. 53-58.
2. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Нобл Б. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. — 279 с.

Лубков Михайло Валерійович, доктор фіз.-мат. наук, с.н.с.,
 Полтавська гравіметрична обсерваторія Інституту геофізики НАН України, Полтава, Україна;
 e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕНО-ЕЛЕМЕНТНО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ АНІЗОТРОПНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Лубков М.В.

На сучасному етапі у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягненому прогресу в розумінні основних законів фільтрації у пористих колекторських пластах, виникають можливості дослідження раніше недоступних фільтраційних систем. Це перш за все стосується процесів, які протікають у неоднорідних анізотропних продуктивних пластах нафтоносних і газоконденсатних родовищ. Неможливість проведення прямих геологічних і фізичних вимірювань у більшості таких систем, роблять математичне моделювання одним із основних інструментів їх дослідження.

Ця доповідь присвячена математичному моделюванню у неоднорідних анізотропних пластах і практичному застосуванню результатів у нафто і газовидобуванні.

Для вирішення цих практичних задач застосовано комбінований скінчено-елементно-різницький метод розв'язання нестационарної анізотропної задачі п'єзопровідності для нафтової фази та задачі п'єзопровідності (Лейбензона) для газової фази з урахуванням інфільтрації відповідної фази на межах розглянутого пласта [1, 2]. У випадку нафтоносного деформованого пласта, враховуючи, що його товщина значно менше горизонтальних розмірів, достатньо скористатись двовимірною постановкою задачі п'єзопровідності у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \frac{1}{c_n} (k_{xx}^n \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + k_{yy}^n \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + 2k_{xy}^n \frac{\partial P_n}{\partial x} \frac{\partial P_n}{\partial y}) + \gamma_n; \quad (1)$$

$$P_n(t=0) = P_n^0; \quad (2)$$

$$k_n \text{grad} P_n = \alpha_n (P_n - P_{cp}^n). \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння п'єзопровідності; (2) – початкова умова; (3) – умова інфільтрації нафти на межах розглянутого пласта; $P_n(x, y, t)$ – тиск, як функція координат і часу; c_n – коефіцієнт п'єзоопору нафти; γ_n – параметр витоку нафти в пласті; P_n^0 – початковий тиск нафти у пласті; k_{ij}^n – коефіцієнти проникності нафтової фази; k_n, α_n – коефіцієнти проникності та інфільтрації нафтової фази на межах розглянутої області; P_{cp}^n – тиск на межах розглянутої області.

Відповідно у випадку газоносного пласта задача Лейбензона приймає вид:

$$\frac{\partial P_g^2}{\partial t} = \frac{1}{c_g} (k_{xx}^g \frac{\partial^2 P_g^2}{\partial x^2} + k_{yy}^g \frac{\partial^2 P_g^2}{\partial y^2} + 2k_{xy}^g \frac{\partial P_g^2}{\partial x} \frac{\partial P_g^2}{\partial y}) + \gamma_g; \quad (4)$$

$$P_g(t=0) = P_g^0; \quad (5)$$

$$k_g \text{grad} P_g^2 = \alpha_g (P_g^2 - P_{cp}^g). \quad (6)$$

Тут (4) – рівняння п'єзопровідності газу (Лейбензона); (5) – початкова умова; (6) – умова інфільтрації газової фази на межах розглянутого пласта.

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. - М.: Ин-т компьют. исслед., 2004. - 416 с.

2. Лубков М.В. Моделювання процесів фільтрації у неоднорідних анізотропних нафтоносних пластах/М.В. Лубков, О.О. Захарчук//Геоінформатика 2019. - N 4(72).-С. 23–29.

Махоркін Микола Ігорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул
 Наукова 3-б, м. Львів, 79060, Україна;
 email: mahorkin@ukr.net
 Махоркіна Тетяна Анатоліївна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
 Львівський національний аграрний університет, вул В. Великого 1, м.Дубляни 80381, Україна.

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ КОМПОЗИТНОГО КЛИНУ ІЗ ВСТАВКОЮ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ

Махоркін М.І., Махоркіна Т.А.

Об'єктом дослідження обрано композитний клин, складений із трьох клиноподібних елементів S_1^* , S_2^* , S_3^* з кутами розхилу біля вістря α_1^* , β і α_3^* відповідно ($\alpha_1^* + \beta + \alpha_3^* \leq 2\pi$), що перебуває за умов антиплоскої деформації. Прийнято, що зовнішні клини S_1^* і S_3^* однорідні та ізотропні з модулями зсуву μ_1^* та μ_3^* , а внутрішній клин-вставка S_2^* зроблений із ФГМ, і його модуль зсуву змінюється у трансверсальному напрямі згідно з заданим законом $\mu_2^* = \mu(\varphi)$, $\alpha_1^* < \varphi < \alpha_1^* + \beta$

Функціонально-градієнтну вставку S_2^* змодельовано кусково-однорідним клином, складеним із достатньої кількості клинів з малими кутами розхилу, пружні характеристики яких змінюються від клина до клина за законом $\mu_k = \mu(\varphi_k^*)$, де $\varphi_k^* \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ [1].

Визначення порядку сингулярності напруженого стану у композитному клині зі вставкою з ФГМ звели до відшукування розв'язків відповідних характеристичних рівнянь записаних для багатоклинових систем [1].

Дослідження впливу закону зміни пружних характеристик вставки з ФГМ на напружено-деформований стан здійснено для типових законів опису зміни модуля зсуву вставки, а саме:

лінійного – $\mu(\varphi) = \varphi a + b$, де $a = (\mu_3^* - \mu_1^*)\beta^{-1}$, $b = [\mu_1^*\beta - \alpha_1^*(\mu_3^* - \mu_1^*)]\beta^{-1}$;

квадратичного – $\mu(\varphi) = \left\{ a \left[\varphi - \left(\frac{\beta}{2} + \alpha_1^* \right) \right] + b \right\}^2$, де $a = \beta^{-1}(\sqrt{\mu_3^*} - \sqrt{\mu_1^*})$, $b = 0,5(\sqrt{\mu_3^*} + \sqrt{\mu_1^*})$;

експоненційного – $\mu(\varphi) = b e^{a\varphi}$, де $a = (\beta)^{-1} \ln \gamma$, $b = \mu_1^* \gamma^{-\alpha_1^*/\beta}$, $\mu_1^* \gamma = \mu_3^*$.

На основі аналізу отриманих результатів з'ясовано, що

- вибираючи закон зміни модуля зсуву вставки із ФГМ, можна суттєво впливати на порядок сингулярності в околі вістря тріщини;
- вставка може як посилювати, так і послаблювати порядок сингулярності залежно від геометричних параметрів системи та вибору закону опису зміни пружної характеристики;

1. Makhorkin M. I. The stress singularity order in a composite wedge of functionally graded materials under antiplane deformation/ M.I. Makhorkin, T.A. Skrypochka, A.R. Torskyi // Mathematical modeling and computing. – 2020. – V. 7. – No. 1 – pp. 39–47.

Маковійчук Микола Васильович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: makoviy@ua.fm;

Шацький Іван Петрович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: ipshatsky@gmail.com;

Щербій Андрій Богданович,
 Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна,
 e-mail: shch_andrew@ukr.net

ПРО РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТРІЩИНИ У ТОРОЇДАЛЬНІЙ ОБОЛОНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Маковійчук М. В., Шацький І. П., Щербій А. Б.

У рамках класичної теорії оболонок досліджується вплив однобічного гнучкого покриття на напружений стан навантаженої внутрішнім тиском тороїдальної оболонки з наскрізною тріщиною. Середина поверхня оболонки утворена рухом центра кола з радіусом r по колу з радіусом R ; тріщина розташована вздовж екватора або вздовж горла. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь оболонки [1]. З використанням такої моделі сформульовано крайову задачу для рівнянь теорії пологих оболонок із взаємозв'язаними умовами розтягу-згину на розрізі:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{r}\Delta_r w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{Dr}\Delta_r\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L;$$

$$[u_y] - sh[\mathcal{G}_y] = 0, \quad M_y - shN_y = 0, \quad x \in L;$$

$$N_x = N_{xy} = 0, \quad N_y = qr, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty.$$

Тут x, y – декартові координати з центром посередині розрізу; φ – функція напружень, w – прогин оболонки, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $\Delta_r = \beta_2 \partial^2 / \partial x^2 + \beta_1 \partial^2 / \partial y^2$, $\beta_1 = \pm r / (R \pm r)$, $\beta_2 = 1$; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\mathcal{G}_y]$ – розрив кута повороту нормалі; N_x , N_{xy} , N_y – мембранні зусилля, M_x , M_{xy} , M_y – моменти, q – тиск; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки, h – її товщина; $s = \pm 1$ – визначає варіант покриття (зовнішнє, внутрішнє); L – розріз.

Для розглянутої задачі побудовано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомого стрибка переміщень на тріщині. На основі його асимптотичного розв'язку, отриманого методом малого параметра, досліджено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин тріщини та розподілу зусиль у шарнірному з'єднанні від форми та максимальної кривини поверхні тора.

Для оцінки впливу гнучкого покриття на граничний стан вкритої оболонки з тріщиною використано критерій руйнування композиції за двома механізмами: порушення цілісності покриття з обмеженою міцністю та розтріскування оболонки.

1. Шацький І. П. Задача о трещине в полой оболочке с гибким покрытием / И. П. Шацкий // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 131–138.

Malyuga Volodymyr Sergiyovich, Dr. Sci. (Phys.–Math.),
Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: Malyuga@nas.gov.ua ;

Dukhnovsky Vasyl Yuriyovich, postgraduate student, faculty of mechanics and mathematics,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: vasduhnov@gmail.com ;

Zhuk Yaroslav Oleksandrovich, Corresponding Member of NASU, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: y.zhuk@i.ua

STOKES FLOWS IN 3D CONTAINERS

Malyuga V. S., Dukhnovsky V. Yu., Zhuk Ya. O.

This study consists of two parts. First we consider an analytical approach for solving the problem of steady 3D Stokes flow in some 3D containers with arbitrary velocities prescribed over the surfaces. The approach is based on the superposition method. The principal idea of the method consists of representing the velocity field in a container as the sum of several velocity fields. Each of these velocity fields are represented in the form of Fourier series with arbitrary unknown coefficients. These series satisfy the governing equations and provide sufficient arbitrariness for fulfilling the boundary condition. First we discuss the Stokes problem solution in a finite cylinder. This is the simplest problem because the flow domain is restricted with only two families of coordinate surfaces and the edge (the line of intersection of the lateral and flat lid surfaces) is a smooth line. In this case we do not have any kind of 3D corner at the vicinity of which convergence of the Fourier series can be broken. So, although the flow domain is 3D, the method of solution does not have any principal complication as compared with 2D case. In more complicated and more general 3D problems the container's surface may include conical points [1] or vertices of trihedral corners [2]. In this study we discuss the analytical solution of the Stokes problem in such domains and we describe the Moffatt eddies in a conical domain [1] and in a rectangular trihedral corner [2]. The knowledge of the Stokes flow fields in the rectangular trihedral corner allows us to construct the accurate analytical solution of the Stokes problem in a 3D rectangular cavity.

In the second part of the study we consider the laminar mixing process in the Stokes flow in a 3D container. The flow is induced by a prescribed periodic motion of the container's walls. We show that in 3D flows a much richer variety of mixing regimes is observed than in 2D flow configurations. The mixing process in a 3D flow containing periodic lines is similar to the mixing process in a 2D flow [3]. In this case one of the eigenvalues of the Jacobian matrix of the Poincare map is equal to unity. Therefore a periodic line can clearly be classified in a way similar to that used for classification of periodic points in 2D flows. We can conclude that the mixing processes in a 3D flow containing periodic lines possess essentially two-dimensional characteristics. The elliptic regions of regular motion acting as transport barriers can occur only in this case. In the flows where only isolated periodic points exist, all three eigenvalues of the Jacobian matrix of the Poincare map is not equal to unity. Therefore the liquid elements stretch or compress in all three directions.

1. Gomilko A. M., Malyuga V. S., Meleshko V. V. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner. *J. Fluid Mech.* V. 476. 2003. P. 159 – 177.
2. Malyuga V. S. Viscous eddies in a circular cone. *J. Fluid Mech.* V. 522. 2005. P. 101 – 116.
3. Malyuga V. S., Meleshko V. V., Speetjens M. F. M., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. *Proc. R. Soc. Lond. A.* V. 458. 2002. P. 1867 – 1885.

Маслов Борис Петрович, доктор фіз.-мат. наук, с.н.с.,

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

СПАДКОВА ПОВЗУЧІСТЬ ІЗОТРОПНИХ КОМПОЗИТИВ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ПРИ СКЛАДНОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

Маслов Б.П.

Композитні матеріали застосовуються в елементах конструкцій, які експлуатуються як в умовах тривалих одноразових, так і циклічних навантажень [1, 2]. Міцність і довговічність композитів залежить від величини середніх або максимальних за цикл навантаження напруг в матриці і у включеннях, кількості циклів і т. ін. У зв'язку з цим, для проектування нових матеріалів із заданими властивостями важливим є вивчення мікроструктурних напруг і деформацій, що змінюються в часі. Велике практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних характеристик в'язкопружності і визначення їх залежності від форми включень, типу просторового армування, об'ємної концентрації компонентів. В попередніх роботах отримано розв'язки задач знаходження ефективних пружних постійних нелінійних стисливих і нестисливих пружних композитів. Тут розглянемо в'язкопружний ізотропний композитний матеріал випадкової структури і використаємо метод умовного усереднення [2], із застосуванням інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа-Карсона та чисельних алгоритмів в середовищі Fortran 95, Python 3.8, SfePy. В межах теорії в'язкопружності малих деформацій визначальне співвідношення між деформаціями і напруженнями вважаємо казілінійним, відповідно до модельних уявлень [1, 2]. Миттєве значення тензора деформацій $\mathbf{e}(t)$ залежить від всієї історії зміни компонент тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Накопичена додаткова енергія $U(\boldsymbol{\sigma}, t)$ в матеріалі, що проявляє властивість квазілінійної спадкової повзучості, може бути виражена формулою

$$U(\boldsymbol{\sigma}, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \mathbf{J}(2t - t_1 - t_2) d\boldsymbol{\sigma}(t_1) d\boldsymbol{\sigma}(t_2) + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^t \int_0^t \mathbf{J}^3(3t - t_1 - t_2 - t_3) d\boldsymbol{\sigma}(t_1) d\boldsymbol{\sigma}(t_2) d\boldsymbol{\sigma}(t_3). \quad (1)$$

Тут $\mathbf{J}(t)$, $\mathbf{J}^3(t)$ - функції повзучості другого та третього порядків [2]. Тоді для першого, лінійного $\mathbf{e}_1$ і другого $\mathbf{e}_2$ наближень за величиною градієнтів переміщень можемо записати

$$\begin{aligned} e_{1ij}(\mathbf{e}, t) &= (J_{ijkl} * d\sigma_{kl})(t), \\ e_{2ij}(\mathbf{e}, t) &= (J_{ijkl} * d\sigma_{kl})(t) + (d\sigma_{kl} * J_{ijklmn}^3 * d\sigma_{mn})(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Застосуємо узагальнений принцип відповідності Шепері для залежних від часу квазістатичних розв'язків квазілінійних в'язкопружних крайових задач. Це дозволяє аналізувати задачу спадкової повзучості механіки випадково армованих композитів, виходячи з відомого нелінійно пружного розв'язку та використанням чисельно-аналітичних інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа-Карсона [1, 2].

1. Maslov B.P. Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials // International Applied Mechanics, 2018, **54**, N2, – P.220-230.
2. Маслов Б.П. Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для моделювання повзучості неоднорідного геологічного середовища // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія математика, механіка, 2019, N1(40). – С. 121-124.

Можаровский Валентин Васильевич, доктор технических наук, профессор,
ГГУ имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь,
e-mail: mozh@gsu.by;

Кузьменков Дмитрий Сергеевич, кандидат физ.- мат. наук, доцент,
ГГУ имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь,
e-mail: kuzmenkov@gsu.by;

Москалева Марина Валерьевна, ст. преподаватель,
ГГУ имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь,
e-mail: kulagina@gsu.by;

Киргинцева Светлана Викторовна, ассистент,
ГГУ имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь
e-mail: torgonskaya@gsu.by;

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Москалева М.В., Киргинцева С.В.

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта (автомобилей, электропогрузчиков, подвесных канатных дорог, эскалаторов метро и др.), а также усовершенствование новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Например, при исследовании контактного взаимодействия упругих тел из композитов [1] возникает необходимость создавать новые методики расчета прочности и износа зубьев зубчатых колес [2]. В связи с этим разрабатываются новые математические модели и компьютерные программы расчета напряжений при контакте индентора с упругим телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах взаимодействия. Следует отметить, что до настоящего времени недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии и функционально-градиентных свойств материалов на напряженно-деформированное состояние, а также влияние источников тепла на температурное поле в покрытиях при силовом квазистатическом воздействии, что не позволяет обосновать практику их проектирования.

Кроме того, существует мало сравнимых по эффективности методов расчета и их компьютерной реализации, методик создания алгоритмов поведения конструкций из композитов, особенно из функционально – градиентных материалов. В работе построена методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании, которую можно легко применить для оценки параметров контакта для разных толщин покрытия и материалов.

Для исследования влияния свойств материала и толщины покрытия на параметры контакта была составлена программа на ЭВМ, по которой производился расчет для разных толщин. Методика численного решения контактной задачи для покрытия на упругом основании сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Был разработан алгоритм, и создана программа, реализующая решение интегрального уравнения методом разложения по многочленам Чебышева. Показано применение разработанного подхода к расчету контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из композитов.

1. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.

2. Harshal, P. Contact Stress Analysis of Composite Spur Gear using Photo-Stress Method and Finite Element Analysis / P. Harshal, R. Rahate, A. Marne // International Research Journal of Engineering and Technology. – 2016. – Vol. 3, iss. 7. – P. 540 – 545.

Мисов Костянтин Дмитрович, студент другого курсу аспірантури, факультет математики, фізики та інформаційних технологій

ОНУ імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

e-mail: kmysov2309@gmail.com;

Вайсфельд Наталя Данилівна, доктор фіз.-мат. наук, факультет кібернетики, професор

ОНУ імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,

e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua

КОНЦЕНТРАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ПОБЛИЗУ КОНУСОПОДІБНОЇ ТРІЩИНИ В ДВІЧІ-ЗРІЗАНОМУ ПРУЖНОМУ КОНУСІ

Мисов К. Д., Вайсфельд Н. Д.

Вирішена задача концентрації динамічних напружень поблизу конусоподібної тріщини, що послаблює пружний двічі-зрізаний конус, у випадку усталених крутильних коливань. Беручи до уваги геометрію конусу, задача розглядається у сферичній системі координат. Розв'язок знаходиться у формі суперпозиції неперервного та розривного розв'язку.

Неперервний розв'язок знайдено за допомогою інтегрального перетворення Г.Я. Попова [1] та зведення вихідної неперервної частини задачі до одновимірної крайової задачі у векторній формі в області перетворення. Розв'язок якої був отриманий в явній формі. Результати побудови неперервного розв'язку були опубліковані в [2].

Виведення розривного розв'язку було здійснено шляхом послідовного використання інтегрального перетворення Лежандра, застосованого за узагальненою схемою відносно кутової координати, та варіації інтегрального перетворення Ганкеля щодо радіусної координати. Таким чином, після застосування обох обернених інтегральних перетворень рішення набуває форми інтеграла з невідомою функцією, що представляє собою стрибок переміщення.

Таким чином були знайдені точні розв'язки в явних формах для обох задач, залишаючи нам їх суперпозицію. Далі було побудовано інтегральне сингулярне рівняння, використовуючи умови на берегах тріщини. Воно було перетворене в інтегральне сингулярне рівняння другого роду завдяки тому, що воно має логарифмічне інтегральне ядро. Інтегральне рівняння розв'язувалось за допомогою методу ортогональних поліномів.

Досліджено хвильове поле пружного подвійно зрізаного конуса. Були розраховані ненульові переміщення та напруження. Результати порівнювали з тими, коли всередині конуса є сферична тріщина. Розв'язання проблеми зі сферичною тріщиною було опубліковано в [3].

1. Popov, G. Ya.: New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics. / G. Ya. Popov // *International Applied Mechanics*, V. 39 Is. 12, – 2003. – P.1400-1424.

2. Mysov K. D., Torsion problem for an elastic twice-truncated cone / K. D. Mysov // *Researches in Mathematics and Mechanics*, V. 24, Is. 1(33). – 2019. – P.65-73.

3. Mysov K., Vaysfeld N., The dynamical stress concentration near a spherical crack in a twice-truncated elastic cone / K. Mysov, N. Vaysfeld // *Procedia Structural Integrity*, V. 28. – 2020 – P.352-357.

Navid Mehreganian, Dr.

Department of Mechanical, Material and Aerospace Engineering, University of Liverpool, Liverpool, United Kingdom,

E-mail: n.mehreganian@liverpool.ac.uk

Arash S. Fallah PhD (Engineering), Prof.

Department of Mechanical, Electronic, and Chemical Engineering, Oslo Metropolitan University, Oslo, Norway,

E-mail: arashsol@oslomet.no

Pooya Sareh, Dr.

Creative Design Engineering Lab (Cdel), School of Engineering, University of Liverpool, Liverpool, United Kingdom

E-mail: Pooya.Sareh@liverpool.ac.uk

MULTISTABLE ARCHITECTURED MECHANICAL METAMATERIALS: NEGATIVE STIFFNESS METALATTICE AS IMPACT DISSIPATOR

Navid Mehreganian¹, Arash S. Fallah², and Pooya Sareh^{1*}

ABSTRACT

Recent advances in manufacturing technologies, in conjunction with research developments on metamaterials of various types, have led to the design of metastructures with desired properties that are not ordinarily found in nature. Of this category, multi-stable mechanical metamaterials exhibit superior properties such as recoverability, tunability, and impact resilience. These materials are capable of manipulating the propagating wave through their constitutive elements when transforming from one stable configuration to the other. The periodic structure of such lattices then, although with low relative density, offers enhanced energy dissipation, ballistic resilience and energy entrapment, compared to the conventional materials.

In the present work, we examine the mechanical properties of the metastable metastructure, made of a periodic array of curved -double beams. We examine the response of the lattice under various loading conditions, viz. quasi-static compression, quasi-static tension, and high-velocity impact by a striker, using the Finite Element (FE) numerical models. We also examine an analytical solution for the impact response of the lattice by assuming no plastic dissipation occurring within the structure, while retaining the influence of finite displacements. Using Hamilton's principle of stationarity, a series of coupled Multiple-Degree-of-Freedom Ordinary Differential Equations are derived whose solution is validated against the developed FE models.

Keywords

Mechanical metamaterials; Curved- Double Beams (CDB), Phase Transformation, bistability ratio; snap-through buckling;

Назаренко Володимир Михайлович, доктор технічних наук, член-кореспондент НАН України,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: nazvm1@gmail.com;
 Кіпніс Олександр Леонідович, кандидат фізико-математичних наук,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: a.l.kipnis@gmail.com;

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА БІОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З МАЛОМАСШТАБНИМИ МІЖФАЗНИМИ ЗСУВНИМИ ТРІЩИНАМИ В КУТОВІЙ ТОЧЦІ ЗА НАЯВНОСТІ НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНЬОЇ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТРІЩИНИ

Назаренко В.М., Кіпніс О.Л.

Досліджено граничну рівновагу кусково-однорідної площини з маломасштабними міжфазними зсувними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини (рис. 1).

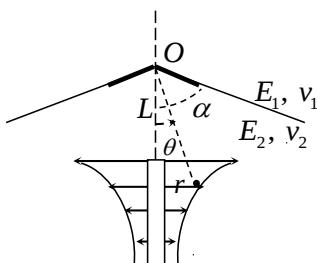


Рис. 1

В рамках підходу до розв'язання задач про міжфазні тріщини, що зародилися в кутових точках кусково-однорідного пружного тіла [1] з використанням методу Вінера – Гопфа [2] у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [3] побудовано точний аналітичний розв'язок відповідної задачі механіки руйнування композитних матеріалів. На основі одержаного розв'язку визначено коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці міжфазної тріщини та отримано формулу для визначення руйнуючого навантаження. Вивчено характер зміни значення руйнуючого в залежності від геометричних та механічних параметрів задачі, що розглядається.

Зокрема, встановлено, що чим менша відстань між кутовою точкою O і кінцем внутрішньої тріщини, тим менше руйнуюче навантаження. Чим більша довжина міжфазної тріщини, тим менше руйнуюче навантаження. Зі зростанням кута руйнуюче навантаження спочатку зменшується, потім збільшується. Чим більше відношення модулів Юнга матеріалів кусково-однорідної площини, тим менше руйнуюче навантаження і меншим є кут найменшого руйнуючого навантаження.

1. Кипніс А.Л. О подходе к решению задач о межфазных трещинах, зародившихся в угловых точках кусочно-однородного тела / А.Л. Кипніс // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 10. — С. 51-5.

2. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.

3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.

Новицький Віктор Вікторович, студент 1 курсу магістратури ,
механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна,
 e-mail: novytskyu.vivi@gmail.com
 Новицький Віктор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна,
 e-mail: v.novytskyu@gmail.com

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ЕРИТРОЦИТА В КАПІЛЯРІ

Новицький Ві.Ві., Новицький В.В.

Дослідження капілярного кровообігу, тобто руху крові в найдрібніших судинах - капілярах, є важливими, оскільки саме капілярний кровотік забезпечує обмін речовин між кров'ю і тканинами.

Останнім часом особлива увага приділяється різноманітним математичним моделям капілярного кровообігу, який здійснюється завдяки дії на кров гідростатичного тиску в артеріальному (артеріола) і венозному (венула) кінцях капіляра.

За різними даними тиск в артеріолі дорівнює 30-35 мм рт. ст., що на 8-10 мм перевищує онкотичний тиск (один з основних тисків, який регулює процеси обміну речовин в судинній системі) плазми крові, в якій плаває еритроцит. Під впливом цієї різниці тиску вода і багато розчинених у ній речовин переходять з еритроцита та плазми крові в тканинну рідину, приносячи до тканин необхідні для життєдіяльності речовини. У процесі просування еритроцита по капіляру гідростатичний тиск спадає і у венозному кінці капіляра становить 12—17 мм рт. ст., що приблизно на 10 мм нижче онкотичного тиску крові, який забезпечує процес обміну речовин. Внаслідок цього вода і розчинені в ній речовини переходять з тканинної рідини в плазму та в еритроцит. Тим самим забезпечується видалення продуктів обміну з тканин у венозну кров.

Практична медицина вимагає нових досліджень для глибшого розуміння процесів руху крові по судинній системі, особливо у зв'язку з пост-Covid синдромом, для якого характерним є тромбування мікросудин. Зокрема, також викликають цікавість процеси руху крові у мікросудинах, коли діаметр судин менший за діаметр еритроцитів.

Саме побудові математичної моделі у вигляді диференціальних рівнянь руху еритроцита по капіляру присвячена ця наукова робота.

Oliynik Valery Nikiforovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher,
Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
 e-mail: v_oliynik@yahoo.com

A STATISTICAL ALGORITHM FOR FAST ESTIMATION OF HEART RATE AND LOCALIZATION OF CARDIAC TONES IN PHONOCARDIOGRAMS RECORDED BY ELECTRONIC STETHOSCOPIES

Oliynik V.N.

Cardiac rhythm parameters are traditionally included to the set of the most important diagnostic characteristics used to assess the current state of patient's health. In this context, in addition to heart rate itself the useful information is provided by its variation, amplitude ratio and time of occurrence of cardiac tones, presence or absence mitral valve murmurs and so on. Time characteristics of the cardiac rhythm are known to be not strictly periodic. Moreover, for long time intervals they may demonstrate features inherent to the regime of weak chaos. The matter is further complicated by the mutual influence of the cardiac and respiratory systems. That is why in recent decades the model of cardiac activity has been shortlisted as one of the most attractive objects for consideration by researchers studying the nonlinear dynamical systems.

One of the standard techniques used for rapid preliminary examination of the cardiovascular system is listening to heart sounds with a stethoscope, also known as auscultation. Nowadays, the progressive introduction of electronic stethoscopes into medical practice together with the development of modern means of digital signal recording (including the smartphones) stimulates the creation of portable auscultation tools that facilitate obtaining of high-quality respiratory and cardiac phonograms suitable for further processing and analysis.

From the point of view of digital auscultation, cardiac sounds can be interpreted, on the one hand, as a stand-alone signal loaded with valuable diagnostic information, and on the other hand, as a powerful interference for breath sounds (in the case of respiratory diagnostics). Thus, the strategic task is not only to assess the parameters of cardiac activity by its acoustic effects, but also to separate cardiac and respiratory components of the signal. Various spectral techniques, Wavelet Transform, Empirical Modal Decomposition, Method of Cyclostationarity, synchrosqueezing algorithms can be used for this purpose. However, in real phonocardiograms, variations in the amplitude and rhythm of cardiac activity lead to a significant reduction in the efficiency of traditional processing techniques, especially if the task is to capture the instants that correspond to the individual phases of the cardiac cycle with each of its beats.

In view of this, a simple statistical algorithm for detecting the first and second heart tones is proposed, which is based on the threshold dichotomy of the original sample using a quasi-median, which divides the ordered sequence of amplitude values in a predetermined ratio (usually 5% to 25% over the quasi-median). Next, we find the instants of occurrence of local maximum / maxima at each of the selected high-level segments. An ordered sample formed from time intervals between adjacent maxima is investigated, followed by the selection of the modes of distribution of obtained values in the ε -neighborhoods of their concentration.

An iterative procedure is developed to refine the modes by excluding the values that fall out of the general range; however the initial approximation also provides a realistic estimate of the typical intervals between the moments of the first and second heart tones. Low computational costs allow applying of the proposed method in portable real-time heart rate control systems.

Онишкевич Володимир Михайлович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний лісотехнічний університет України, Львів, Україна,
 e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

Барабаш Галина Михайлівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
 e-mail: galynabarabash71@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ «ТРЕТІМ ТІЛОМ» У ТРИБОЛОГІЧНИХ ЗАДАЧАХ

Онишкевич В.М., Барабаш Г.М.

Різноманітність природи чинників впливу на тепловий режим трибологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такої практичної задачі. Серед факторів впливу є як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення взаємодіючих тіл та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Вперше термопружна контактна взаємодія тіл за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей була досліджена в [1]. В стаціонарній постановці плоску задачу про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штамп, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю, було розв'язано в [2].

Пропонується математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні [3]. Наведено метод визначення термопроникливості контакту пари тертя [4]. Позаяк у трибологічних задачах контактний тиск у різних точках є різним, то і контактна провідність, взагалі кажучи, теж не буде сталою величиною. Для визначення впливу вхідних параметрів на зміну температури та теплових потоків розглянуто контактну нестационарну задачу термопружності з тепловиділенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності. Розв'язок задачі отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа.

Отримано аналітичні вирази для розподілу температури та теплових потоків. На основі числового аналізу досліджено залежність термічної провідності контакту від вхідних факторів і виявлено суттєвий вплив деяких з них.

1. Шве́ц Р.Н., Мартыняк Р.М. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей / Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23-28.

2. Онишкевич В.М. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штамп з пружною півплощиною / В.М. Онишкевич, Г.Т. Сулим // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2019. – № 1. – С. 138-141.

3. Онишкевич В. Урахування впливу термічної провідності контакту в осесиметричних задачах / В. Онишкевич // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2006. – Вип. 65. – С. 208-215.

4. Онишкевич В.М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Вип. 42, №1. – С. 82-86.

Остос Олександр Хосейович, доктор філософії в галузі математики та статистики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com

Жук Ярослав Олександрович, член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
e-mail: y.zhuk@i.ua

ЗВ'ЯЗАНІ ТЕРМОМЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ЕЛАСТОМЕРНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОПЕРЕДНІМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Остос О.Х., Жук Я.О.

Досліджується задача про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної еластомерної кругової циліндричної оболонки з попередніми напруженнями. В осесиметричній постановці вважається, що внаслідок технологічного процесу виготовлення або певної переісторії деформування в оболонці присутнє мембранне зусилля, яке моделюється прикладеним розтягувальним або стискальним попереднім навантаженням.

Постановка задачі ґрунтується на використанні гіпотез Кіргхофа-Лява та концепції комплексних модулів, які застосовуються для опису циклічної реакції в'язкопружного матеріалу на гармонічне навантаження. Вибір типового еластомера в якості матеріалу, з якого виготовлена оболонка, пояснюється низкою їх специфічних властивостей, серед яких найбільш важливою є та, що при циклічному навантаженні частина механічної енергії внаслідок внутрішнього тертя переходить в теплову, тобто спостерігається явище саморозігріву чи дисипативного розігріву.

Механічні коливання оболонки збуджуються поверхневим тиском, що гармонічно змінюється в часі з амплітудою, яка розподілена за деяким законом по поверхні пластини, та круговою частотою, близькою до резонансної.

Задача розв'язується у два етапи: спочатку розв'язується задача механіки. Застосування теорії Доннелла-Муштари-Власова і концепції комплексних модулів та амплітуд дозволяє отримати комплексний аналог рівняння поперечних коливань оболонки при гармонічному навантаженні. На другому етапі розв'язується задача стаціонарної або нестаціонарної теплопровідності, в якій знайдені амплітуди кінематичних і силових характеристик використано для побудови дисипативної функції – джерела тепла.

Побудовано розподіли кінематичних і силових параметрів, а також температури вздовж осьової координати. Повторюючи розв'язок задачі для різних значень частот, побудовано амплітудно- і температурно-частотні характеристики (АЧХ і ТЧХ) коливань оболонки в околі декількох нижніх значень резонансної частоти при різних значеннях зовнішнього тиску та попереднього навантаження.

Для визначення ресурсу конструкції за тепловим критерієм розв'язано нестаціонарну задачу теплопровідності для закритичних значень зовнішнього навантаження. Для нестаціонарної задачі побудовано криві еволюції температури в часі для різних значеннях зовнішнього тиску і попередніх навантажень. Побудовано осьові розподіли температури в певні моменти часу. Побудовані діаграми втомної витривалості за тепловим критерієм (аналоги діаграм Велера). Визначено значення параметрів навантаження, за яких реалізуються безпечні режими функціонування конструкції. Для закритичних режимів визначено кількість циклів коливань до руйнування за тепловим критерієм.

I. Senchenkov I. K., Zhuk Ya. A., Karnaukhov V. G. Modeling the Thermomechanical Behavior of Physically Nonlinear Materials under Monoharmonic Loading. International Applied Mechanics. 2004. Vol. 40. P. 943–969.

Павлюк Ярослав Вікторович, старший науковий співробітник,
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
 e-mail:creep@inmech.kiev.ua;

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ЦИКЛІЧНОЇ ПОВЗУЧОСТІ НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ХЕВІСАЙДА

Павлюк Я.В.

Розглядається задача розрахунку деформацій циклічної повзучості, що задається у вигляді циклічних чергувань навантажень та розвантажень рівної амплітуди за прямокутними циклами, при чому тривалість напівциклів навантаження та розвантаження співпадають. Умова навантаження конкретизується у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\nu} (h(t - 2(k-1)t_0) - h(t - (2k-1)t_0))\sigma_1, \quad (1)$$

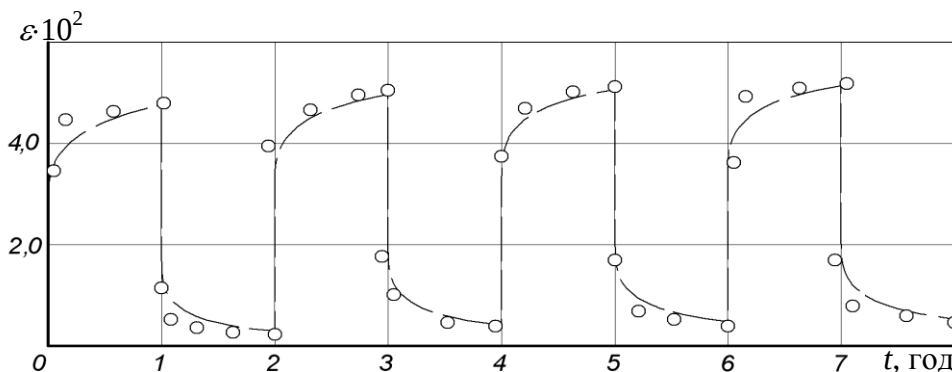
де σ_0 – амплітуда напруження у циклі; t_0 – тривалість напівциклу навантаження; ν – кількість циклів навантаження.

Деформації повзучості розраховуються із використанням нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю [1], яка задається згладжуючим кубічним сплайном, за рівнянням

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^3 b_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\sigma_0 h[t - 2(\nu-1)t_0] - \sigma_0 h[t - (2\nu-1)t_0]) \times \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right)^i, \quad (2)$$

де ядро спадковості обране у вигляді дробово-експоненційної функції з параметрами α, β, λ .

В роботі розв'язано та експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій циклічної повзучості для нейлонових волокон FM 10001. Амплітуда циклічного напруження складала 6,2 МПа, $t_0 = 1$ година, кількість циклів навантаження $\nu = 4$. Результати розрахунків деформацій циклічної повзучості $\varepsilon(t)$, що розраховані за рівнянням (2), наведено на мал.1., які співставлено із експериментальними даними запозиченими з [2].



Мал.1. Вихідні експериментальні дані (точки) і розрахункові (штрихові лінії) значення кривих повзучості

Отримано задовільне узгодження результатів розрахунку із експериментальними даними.

1. Голуб В.П., Павлюк Я.В., Фернаті П.В. К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости // Прикл. механика. – 2017. – Том 53, №4, С. 76-93.
2. Marin J. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion / J.Marin, A.C.Webber, G.F.Weissmann // Proc. ASTM.– 1954.– Vol. 54.– P. 1313–1343.

Петренко Наталія Віталіївна, інженер,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка, Київ, Україна,
e-mail: nat212@ukr.net

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БЕЗПЕРЕРВНОГО ЗЛИТКА

Петренко Н.В.

Формування злитка відбувається в умовах високотемпературного режиму. Побудова розв'язків задач термопружності та термов'язкопружності для безперервного злитка становить значні труднощі через складність областей злитка, в якій шукаються ці розв'язки, а також через істотну залежність фізико-механічних властивостей матеріалу від температури. Для вивчення структури злитка, поліпшення його якості і підвищення виходу придатного металу дуже важливим є знання напружень у твердій кірці і в гетерогенному шарі безперервного злитка.

У даній роботі розглянуто розв'язання плоскої задачі термопружності для прямокутного злитка. При виході злитка з кристалізатора поблизу поверхонь охолоджуваних водою поведінка твердої кірки перебуває у хорошій відповідності до теорії пружності. Для визначення температурних напружень розглянуто розв'язок задачі квазистатичної теорії термопружності в переміщеннях. Також розглянуто рівновагу пружного, в'язкопружного тіла і гетерогенного тіла складної форми, породженої температурним полем, як термодинамічної системи, взаємодія якої з навколишнім середовищем проявляється лише в теплообміні при механічній роботі тягнучих валків. Температура розглядається як міра інтенсивності теплового руху і змінюється внаслідок теплообміну в зоні кристалізатора і в зоні вторинного охолодження. Вона може змінюватися в результаті дії потоків тепла, що розташовуються в зоні рідкої фази, і тепловиділенні при самому процесі деформування. Для визначення температурних напружень розглядається розв'язок задачі квазистатичної теорії термопружності в переміщеннях. Введення температурного потенціалу переміщень у скалярні диференціальні рівняння квазистатистичній теорії термопружності дозволяє на основі дискретизації середовища врахувати з високою точністю вплив температурного поля на появу дефектів у злитку, що кристалізується. Зняті граничні умови можуть бути точно реалізовані за допомогою функцій Лява.

Плещинська Алла Вікторівна, кандидат техн. наук, старший науковий співробітник
 Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка Національної академії наук України
 e-mail: plashchynska.alla@gmail.com

ЩОДО СПОСОБУ РОЗРАХУНКУ КІНЕТИКИ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕННЯ ВЗДОВЖ ФРОНТУ ТРІЩИНИ ВТОМИ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

Плещинська А.В.

Розглянуто чисельний спосіб визначення кінетики накопичення пошкодження вздовж фронту тріщини втоми в тонкій ізотропній пластині за умов одновісного розтягу-стиску. Рівняння руху фронту тріщини втоми [1] запишемо у вигляді суперпозиції рівнянь для N дискретних інтервалів часу $n_i \leq n \leq n_{i+1}$

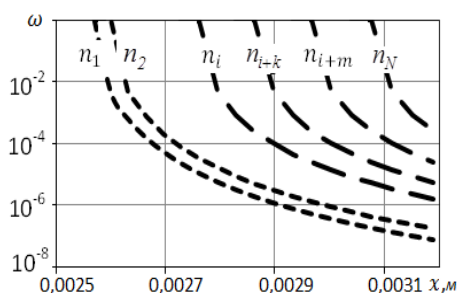
$$\sum_{i=0}^N \int_{\omega(n_i, x_j)}^{\omega(n_{i+1}, x_j)} [1 - \omega(n_i, x_j)]^q d\omega = D \sum_{i=0}^N \int_{n_i}^{n_{i+1}} \left((\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}} \right)^q dn, \quad j = i, N, \quad (1)$$

де $(\sigma_a)_{eqv}$ – амплітудне напруження еквівалентного симетричного циклу навантаження; ℓ – довжина тріщини на момент часу n_i ; x_j – координата точки на фронті руйнування; D , q – коефіцієнти степеневого закону накопичення пошкодження внаслідок втоми. Шляхом інтегрування рівняння (1), одержуємо співвідношення для визначення рівня пошкодження в довільний момент часу на фронті руйнування у вигляді

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1 - \left[[1 - \omega(n_i, x_j)]^{q+1} - (q+1)D \left[(\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}} \right]^q (n_{i+1} - n_i) \right]^{\frac{1}{1+q}}, \quad (2)$$

де $n_0 = 0$, $\omega(n_0, x_j) = 0$, а число циклів n_{i+1} визначається з умови руйнування на фронті тріщини $\omega(n_{i+1}, x_j) = 1$, $j = i$ з рівняння

$$n_{i+1} = n_i + [1 - \omega(n_i, x_i)]^{q+1} \left[(q+1)D \left[\sigma_a \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_i - \ell(n_i))}} \right]^q \right]^{-1}. \quad (3)$$



На рис. надано розрахункові криві процесу накопичення пошкодження вздовж фронту тріщини втоми $\ell_0 = 2,54 \cdot 10^{-3}$ м в тонкій ізотропній пластині з алюмінієвого сплаву 7075-T6 при $\sigma_a = 69$ МПа $\sigma_m = 138$ МПа. Чисельний спосіб моделювання дозволяє відобразити стрибкоподібний характер розповсюдження тріщини втоми та врахувати зміну рівня пошкодження в матеріалі пластини із часом.

1. Golub V.P, Plashchinskaya A.V. [Fatigue fracture model for thin isotropic plates with cracks in axial loading](#) // International applied mechanics, 1994, 30 (7). P. 520-529.

Попов Всеволод Геннадійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com ;

Кирилова Ольга Іванівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна,
e-mail: olga.i.kyrylova@gmail.com

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ, ПОВ'ЯЗАНОГО З ДИНАМІЧНОЮ ЗАДАЧЕЮ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Попов В.Г., Кирилова О.І.

Розглядається контактна взаємодія двох чверть просторів $-\infty < x < 0$; $h < y < +\infty$; $-\infty < z < \infty$ і $0 < x < +\infty$; $0 < y < +\infty$; $-\infty < z < \infty$, зчеплених між собою по області $x = 0$; $h < y < +\infty$; $-\infty < z < \infty$. До поверхні $y = 0$ другої чвертини простору прикладене зсувне вздовж осі Oz навантаження $q(x)e^{-i\omega t}$, $0 < a < x < a+l$. Далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, всюди відкидається. За таких умов обидві площини знаходяться в стані деформації повздовжнього вздовж осі Oz зсуву і єдиним відмінним від нуля є переміщення $W_j(x, y)$, $j = 1, 2$, які задовольняють рівнянням Гельмгольца:

$$\Delta W_j + \kappa_{j2}^2 W_j = 0, j = 1, 2; \kappa_{j2}^2 = \frac{\omega^2 \rho_j}{G_j}, \quad (1)$$

де ρ_1, G_1 – густина і модуль зсуву правої чверті простору, ρ_2, G_2 – лівої. На горизонтальній поверхні чверть просторів виконуються умови

$$\tau_{yz}^1(x, 0) = \begin{cases} q(x), x \in [a, a+l] \\ 0, x \notin [a, a+l] \end{cases}, x \in (0, +\infty); \quad \tau_{yz}^2(x, h) = 0, x \in (-\infty, 0) \quad (2)$$

На вертикальній поверхні $x = 0, y \geq 0$ крайові умови формулюються так, щоб у області контакту здійснювались умови повного зчеплення:

$$\tau_{xz}^1(0, y) = \begin{cases} 0, 0 < y < h \\ p(y), y > h \end{cases}; \quad \tau_{xz}^2(0, y) = p(y), y > h, \quad W_1(0, y) = W_2(0, y), y > h \quad (3)$$

Сформульована крайова задача (1)-(3) приводиться до наступного сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою однозначності відносно невідомих напружень $p(y)$ в області контакту:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \chi(s) \left[\frac{1+\gamma}{s-\sigma} - \frac{\gamma}{s+\sigma} - \frac{1}{s+\sigma+2} + R(s, \sigma) \right] ds &= F(\sigma) \\ \frac{d}{\pi} \int_0^\infty \chi(s) [-(1+2\gamma) \ln s - \ln(2+s) + H(s)] ds &= f_0 \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) $\chi(s) = \frac{P(h(1+s))}{G_1}$, $d = \frac{h}{l}$, функції $R(s, \sigma), H(s)$ подаються рівномірно збіжними інтегралами. Припускається, що розв'язок рівнянь (4) має інтегровану степеневу особливість при $s \rightarrow 0$ і прямує до нуля при $s \rightarrow \infty$:

$$\chi(s) = s^{-\sigma} e^{-s} \varphi(s) \quad (5)$$

Для його відшукування створено числовий метод, який ґрунтується на використанні у якості точок колокації коренів спеціальної функції.

Райновський Ігор Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук, м.н.с. НАН України,

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,

e-mail: igor.raynovskyy@gmail.com;

Тимоха Олександр Миколайович, доктор фіз.-мат. наук, член-кореспондент НАН України,

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,

e-mail: atimokha@gmail.com

ПРО ДЕМПФОВАНІ УСТАЛЕНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В КОНТЕЙНЕРІ КРУГОВОГО ПЕРЕРІЗУ ДЛЯ ДОВІЛЬНИХ ПЕРІОДИЧНИХ НЕПАРАМЕТРИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Райновський І.А., Тимоха О.М.

Побудовано асимптотичні періодичні розв'язки модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва [1,2], які описують демпфовані резонансні усталені хвилі у вертикальному круговому резервуарі, що виконує довільний періодичний рух з частотою, близькою до найнижчої власної частоти, досліджується стійкість цих хвиль. Необхідною умовою розв'язності побудованих асимптотичних періодичних розв'язків є система алгебраїчних (секулярних) рівнянь, що зв'язують чотири амплітуди домінуючих хвиль. Виведено еквівалентну (але більш релевантну з фізичної точки зору) форму секулярних рівнянь. Коли в'язке демпфування дорівнює нулю, існують їх аналітичні розв'язки. Для демпфованого хлюпання секулярні рівняння доводиться розв'язувати численно.

Отримано аналітичні розв'язки секулярної системи, які описують стаціонарні резонансні хвилі у поздовжньо-збуреному резервуарі. Враховується ефект в'язкого демпфування. Усталені хвилі класифікуються як (1) стоячі, (2) кругові та (3) нерегулярні [хаотичні]. Останні хвилі очікуються, коли всі теоретичні хвильові режими нестійкі. Діапазони частот вимушених хвильових режимів оцінюються щодо вхідних (фізичних та геометричних) параметрів, включаючи коефіцієнт демпфування. Результати порівнюються з експериментальними вимірами, проведеними різними авторами. Порівняння підтверджують валідність побудованої аналітичної теорії.

Використовуючи секулярні рівняння, аналізуємо усталені хвильові режими, що виникають внаслідок горизонтального еліптичного (орбітального) руху резервуара. Розроблено схему розв'язування цих рівнянь. Проводиться параметричний аналіз амплітудно-частотних характеристик, аби визначити, як змінюються хвильові режими та їх стійкість із частотою збурення та еліптичною орбітою, співвідношенням її осей. Основний результат полягає у підтвердженні експериментального зникнення кругової хвилі, спрямованого проти збурення (до еліптичної траєкторії), коли співвідношення осей прямує до одиниці (перехід до кругової орбіти). Останній випадок має відношення до біореакторів. Проведено порівняння з експериментальними замірами [3].

1. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Sloshing in upright circular container: Theory, analytical solutions and applications / I.A. Raynovskyy // CRC Press/Taylor & Francis Group, 2021.—170 pp.

2. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container / I.A. Raynovskyy // Fluid Dynamics Research. – 2018. – **50**, Article ID 045502.— P. 1-27.

3. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion / I.A. Raynovskyy // Mathematical Problems in Engineering.— 2018.— Article ID 5487178.— P. 1-8.

Реут Олена Вікторівна, асистент, факультет математики, фізики та інформаційних технологій
ОНУ імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: reut@onu.edu.ua;

Вайсфельд Наталя Данилівна, д-р ф.-м. н., професор, факультет математики, фізики та інформаційних технологій
ОНУ імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна,
e-mail: vaysfeld@onu.edu.ua

НЕВІСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЗРІЗАНОГО КРУГОВОГО КОНУСУ З ВИРІЗОМ УЗДОВЖ ТВІРНОЇ

Реут О. В., Вайсфельд Н. Д.

Статичний варіант поставленої задачі розв'язано раніше у праці Г.Я. Попова [1]. Тут проведено узагальнення проблеми на випадок усталених коливань.

Пружний двічі зрізаний сферичними поверхнями конус з вирізом уздовж твірної піддається впливу динамічного навантаження по сферичних поверхнях. Вважається, що дотичні напруження на сферичних поверхнях відсутні. По плоских гранях задано або переміщення або умови ковзного закріплення. По конічних гранях також виконуються або умови другої основної задачі або ковзного закріплення. Потрібно відшукати хвильове поле пружного конусу.

Розв'язок системи рівнянь руху знайдено за допомогою методу інтегральних перетворень. За кутовими змінними застосовано послідовно скінчене інтегральне перетворення Фур'є та інтегральне перетворення Г.Я. Попова [2]. У просторі трансформант перетворень отримано систему трьох звичайних диференціальних рівнянь відносно трансформант переміщень, яку розв'язано точно за допомогою побудови фундаментальної матриці функції та базисної системи матриць-функцій для випадку крайових умов ковзного закріплення.

Виведено формули для динамічних переміщень та напружень, встановлено власні частоти тіла та досліджено явище крайового резонансу [3], що виникає при певних умовах навантаження. Проведено порівняння результатів з даними, що отримано для випадку статичного навантаження.

1. Popov G. Ya. Exact solutions of some mixed problems of elasticity for the truncated circular cone with cut along the generatrix / G. Ya. Popov // International Applied Mechanics. – 2002. – V. 56, Is. 4. – P.681-693.

2. Popov G. Ya.: New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics / G. Ya. Popov // International Applied Mechanics. – 2003. – V. 39, Is. 12. – P.1400-1424.

3. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Київ: Наукова думка, 1981. – 284 с.

Реут Віктор Всеволодович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
ОНУ ім. І.І. Мечнікова, Одеса, Україна,
e-mail: reut@onu.edu.ua;

Земсков Олександр Володимирович, студент другого курсу аспірантури, прикладна математика,
ОНУ ім. І.І. Мечнікова, Одеса, Україна,
e-mail: alekzem81295@gmail.com

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ КЛИНОПОДІБНОГО СЕРЕДОВИЩА, ПОСЛАБЛЕНОГО КІНЦЕВОЮ ТРІЩИНОЮ, ЯКА РОЗТАШОВАНА НА ВІДРІЗКУ ПРЯМОЇ

Реут В.В., Земсков О.В.

Розглядається антипловська задача для клиноподібного середовища $\{0 < r < \infty\}$, послабленого кінцевою тріщиною, яка розташована на відрізку прямої

$$\theta = \varphi(r), a < r < b, r\varphi'(r) = \operatorname{tg}(\beta - \varphi(r)),$$

що утворює з віссю $\theta = 0$ кут β .

Грані області закріплені, передбачається що тріщина не виходить за грані області, до берегів тріщини прикладене зсувне навантаження інтенсивності p , після перетворення Фур'є за змінною θ задача зводиться до одномірного диференціального рівняння, в якому фігурує $\chi(r)$ - невідомий стрибок переміщення переходить через тріщину, задовольняючи умовам на тріщині. Задача зводиться до інтегрального сингулярного рівняння

$$\frac{2k^2 + (1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} \frac{1}{2\pi i} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \mu(\xi) \ln|x - \xi| d\xi + \int_{-1}^1 \mu(\xi) K(x, \xi) d\xi = p, |x| < 1, \mu(\xi) = \chi(e^{A\xi + B}), \text{ де}$$

$K(x, \xi)$ - нескінченна диференційована функція, A, B - деякі константи.

Розв'язування цього рівняння зводиться методом інтегрального перетворення до розв'язування нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримано оцінку збіжності методу. Побудовано графік залежності коефіцієнтів інтенсивності напруження поблизу кінців тріщини.

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Ленинград: Наука, 1967. – 401 с.

2. Попов Г. Я. Об одном способе решения задач механики для слоистых сред / Г. Я. Попов, С.Т. Грибняк // Прикл. механика. – 1980. – № 42 – 143-156 с.

3. Попов Г. Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г.Я. Попов, С. А. Абдымананов, В. В. Ефимов. – Алматы: Руан, 1999. – 113 с.

4. Вайсфельд Н. Д. Антипловская деформация клиношаруватого середовища / Н.Д. Вайсфельд, О.П.Мойсеєнок // Вісник Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3 – 89-92 с.

Ревенко Віктор Петрович, доктор фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна,
e-mail: victorrev@ukr.net

КОМП'ЮТЕРНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ

Ревенко В.П.

Використання сучасних комп'ютерів дозволяє розробити нові методики розв'язання крайових задач теорії пружності з використанням неортогональних систем функцій. Основні особливості запропонованого підходу розглянемо на прикладі розв'язання крайової задачі для пластини з постійними та змінними пружними характеристиками [1], серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi = \{(x, y) \in ([0, a] \times [-b, b])\}$, $a \gg b$, на краях якої задані навантаження. Напруження описуються функцією напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє рівняння в часткових похідних $T\Phi(x, y) = 0$, де T – оператор четвертого порядку із змінними коефіцієнтами [1]. Після виділення напружень основного напруженого стану, вихідну крайову задачу розділимо на чотири однотипні задачі. Розглянемо одну з них

$$\sigma_x(0, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = \sigma_1(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} = \tau_1(y), \quad y \in [-b, b], \quad (1)$$

де $\sigma_1(y)$ – парне, $\tau_1(y)$, $\tau_1(\pm b) = 0$ – непарне самозрівноважене навантаження. На трьох інших сторонах пластини задані нульові навантаження.

Наближений розв'язок задачі (1) подано у вигляді такої суми рядів Фур'є

$$\Phi(x, y) = \sum_{n,k=1}^N \{a_{kn} \varphi_k(y) + b_{kn} \psi_k(y)\} \exp(-n\omega x), \quad (2)$$

де $\varphi_k(y) = \sin k\omega y$, $\psi_k(y) = \cos k\omega y$, $\omega = k_1/b$, $2 < k_1 < 3$. Використано функцію напружень (2), напруження [1], і записано умови (1) та умови відсутності навантажень у вигляді

$$\sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(y) = P_m, \quad \gamma_m \in [\beta_m, \alpha_m], \quad m = \overline{1, K}, \quad (3)$$

де $M = 2N^2$, $K = 4$, N – кількість гармонік розкладу функцій.

Розв'язок задачі буде визначати мінімальне значення такого функціоналу

$$\Omega_M \{c_j\} = \int_0^a \int_0^b [T\Phi(x, y)]^2 dx dy + \sum_{m=1}^4 \int_{\beta_m}^{\alpha_m} [c_k A_{m,k}(y) - P_m]^2 d\gamma_m = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2. \quad (4)$$

Форма (4) не є лінійною, але, якщо її мінімум при зростанні M прямує до нуля, то це значення служить оцінкою похибки розв'язку. Узагальнено відомий метод Фур'є на випадок розв'язку системи рівнянь із неортогональними функціями. Комп'ютерне моделювання встановило, що дві неортогональні системи функцій можуть задовольнити не тільки вихідне рівняння, умови (1), але й нульові крайові умови на бокових сторонах пластини. Знайдено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд. Москов. университета, 1976. – 367 с.

Рево Сергій Лукич, доктор фіз.-мат. наук, завідувач НДЛ «Фізика металів та кераміки»,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: s_revo@i.ua ;

Авраменко Тетяна Григорівна, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: tetianavramenko@gmail.com;

Мельниченко Микола Миколайович, кандидат фіз.-мат. наук, ст.наук.співробітник,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua;

Іваненко Катерина Олексіївна, кандидат фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
 e-mail: ivanenko@univ.kiev.ua

ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАНОКОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ НА ОСНОВІ ФТОРОПЛАСТУ

Рево С.Л., Авраменко Т.Г., Мельниченко М.М., Іваненко К.О.

Особливості молекулярної і надмолекулярної структури політрифторхлоретилен (фторопласту) забезпечують реалізацію унікальної комбінації його міцності, триботехнічних, антикорозійних, теплофізичних та інших експлуатаційних характеристик у різних виробках і зокрема - робочих деталях різноманітного обладнання. Різні наповнювачі (волокна і частки) успішно зменшують на кілька порядків знос фторопластів, але одночасно вони сприяють погіршенню термічних і хімічних властивостей, які в свою чергу забезпечують привабливість для застосування цих полімерів.

Використання вуглецевих нанонаповнювачів дозволяє усунути багато обмежень, властивих традиційним наповнювачам. При цьому невеликі концентрації наночастинок можуть призвести не тільки до покращення характеристик механічних властивостей, таких як міцність, модуль Юнга, деформація до руйнування полімерних матриць, а й роблять композиційний матеріал електропровідним. Такого роду струмопровідні полімерні композиційні матеріали можуть успішно застосовуватися для екранування електроніки, або для створення складних багатопарових електронних плат.

Застосування методів наноіндентування дозволяє вирішувати широке коло питань наноматеріалознавства, таких як визначення механічних властивостей, динаміка і механізми деформації найрізноманітніших матеріалів в тому числі і полімерних наноккомпозитів. У даній роботі для створення наноккомпозиційного матеріалу на основі фторопласту використовувався термічно розширений графіт, як нанорозмірна форма вуглецевого наповнювача. Методом вимірювання мікротвердості було проведено оцінку пружних і міцнісних властивостей аморфно-кристалічного композиту з політрифторхлоретиленовою матрицею.

Показано, що мікротвердість наноккомпозиційного матеріалу фторопласт - термічно розширений графіт зменшується зі збільшенням концентрації наповнювача. Спостережувані при цьому зміни модуля Юнга і відношення H/E свідчать про зміну аморфно кристалічної поведінки композиту до такої, що характерно дрібнокристалічним матеріалами, і залежить від дисперсності термічно розширеного графіту. Останнє може бути пов'язано з різним ступенем структурованості полімеру і формуванням в структурі полімеру різного орієнтаційного порядку.

Дослідження структури і механічних характеристик такого наноккомпозиційного матеріалу дає можливість сформулювати науково обґрунтований підхід до прогнозування і цільового регулювання властивостей для створення наноккомпозиційних матеріалів на основі фторопласту з прогнозованими властивостями.

Резнік Віра Сергіївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, Інститут механіки НАН України ім С.П. Тимошенка, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ; e-mail creep@inmech.kiev.ua;
 Ушаков Олексій Вікторович, помічник директора, Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України, вул. Василенка, 3, 03113, м. Київ; e-mail nddkr_igte@ssu.gov.ua
 Горун Олена Юріївна, провідний науковий співробітник, Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України, вул. Василенка, 3, 03113, м. Київ; e-mail nddkr_igte@ssu.gov.ua

ЩОДО РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ В ПРИЗМАТИЧНИХ СТЕРЖНЯХ З ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА УМОВ РОЗТЯГУ ІЗ КРУЧЕННЯМ

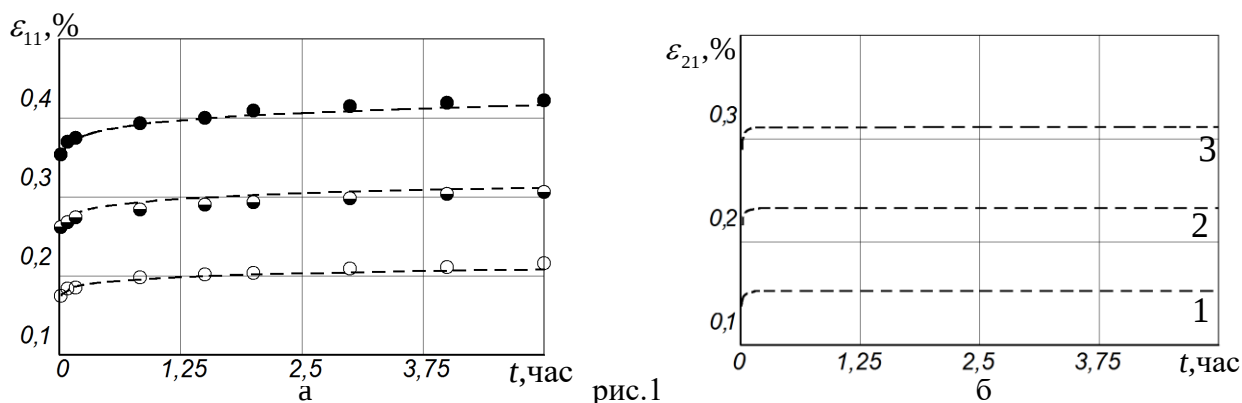
Резнік В.С., Ушаков О.В. Горун О.Ю.

Розглядається процес повзучості призматичних стержнів з лінійно-в'язкопружних полімерних матеріалів за умов комбінованого навантаження. Визначальні рівняння, що задають залежність між деформаціями, напруженнями и часом можуть бути представлені у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної деформації [1]

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G} \left[s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{3B} \delta_{ij} \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right]; \quad (i, j = \overline{1,3}) \quad (1)$$

Тут $e_{ij}(t)$ – компоненти девіатора тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$; $s_{ij}(t)$ – компоненти девіатора тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$; $\varepsilon_v(t)$ – об'ємна деформація; σ_0 – середнє напруження; $K_s(t-\tau)$ – ядро зсувної повзучості; $K_v(t-\tau)$ – ядро об'ємної повзучості; G – модуль зсуву; B – об'ємний модуль; λ_s , λ_v – реологічні параметри. В якості ядра спадковості використовується дробово-експоненційне ядро. Параметри ядер визначаються з використанням співвідношень між ядрами за умов складного напруженого стану і ядрами одновимірного напруженого стану [2].

На Рис. 1 наведено результати розрахунків для оргскла СТ-1 за рівнянням (1) для деформацій повздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ (а) при напруженнях $\sigma_{11} = 7,65$ (○), 11,45 (●) і 15,30 (●) і зсувної повзучості $\varepsilon_{21}(t)$ (б) при напруженнях $\tau_{21} = 7,50$ (1), 11,45 (2), 15,30 (3) МПа. Тут експериментальні дані нанесено точками, а результати розрахунків – лініями.



Як видно з рис.1, (а) розрахунки за рівнянням 1, досить точно узгоджуються з експериментальними даними, а на рис 1,(б) наведено прогнозування деформацій зсувної повзучості.

1. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
2. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the hereditary kernels of isotropic linear-viscoelastic materials in combined stress state. 2. Proportional deviators // Inter. Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, N8. – P. 648-660.

Резнік Віра Сергіївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, Інститут механіки НАН України, Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mail creep@inmech.kiev.ua

ОБГРУНТУВАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ТИПУ МОДЕЛІ РАБОТНОВА В ЗАДАЧАХ ПОВЗУЧОСТІ

Резнік В.С.

Розглянемо задачу визначення параметрів ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння, що задають залежність між компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і компонентами тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$ при повзучості запишемо у вигляді [1]

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); & (i, j = \overline{1,3}) \\ \varepsilon_i(t) = \psi_i \left[\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right]; \\ \varepsilon_v(t) = \psi_v \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right]. \end{cases} \quad (1)$$

Тут $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_v(t)$ – інтенсивність деформацій та об'ємна деформація; $\sigma_i(t)$, $\sigma_0(t)$ – інтенсивність напружень та середнє напруження; $\psi_i(\cdot) \div \psi_v(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей; $K_i(t-\tau) \div K_{21}(t-\tau)$ – ядра повзучості; λ_v і λ_i – реологічні параметри, що визначаються експериментально.

Вважається, що матеріал деформується нелінійно-пружно за умов розтягу або кручення при напруженнях σ і τ відповідно, що не перевищують деяке критичне значення σ_* і τ_* . Значення σ_* і τ_* відповідає ординаті точки на діаграмі „ $\sigma - \varepsilon$ ” і „ $\tau - \gamma$ ”, для якої дотичний модуль $\bar{E}(\varepsilon_*)$ і дотичний модуль зсуву $\bar{G}_*(\gamma_*)$ задовольняє співвідношенню

$$\bar{E}(\varepsilon_*) = \frac{1}{2 \ln 2} E, \quad \bar{G}_*(\gamma_*) = \frac{1}{2 \ln 2} G_0, \quad (2)$$

де E – модуль пружності, G_0 – початковий модуль зсуву. Межа застосування розглянутої моделі обмежується рівнем напружень, що не перевищує межу нелінійного-пружного деформування, яка обмежується рівнем напружень σ_* і τ_* , для якого виконується умова (2).

Між ядрами інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t-\tau)$, ядрами об'ємної повзучості $K_v(t-\tau)$ та ядрами повздовжньої $K_{11}(t-\tau)$ та поперечної $K_{22}(t-\tau)$ повзучості справедливі співвідношення

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{2}{3} \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_i(\sigma_{11})}, \quad \lambda_v K_v(t) = \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2 \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right)}, \quad (3)$$

що дозволяють визначити параметри ядер спадковості за умов складного напруженого стану за ядрами одновимірного напруженого стану [2].

1. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
2. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the hereditary kernels of isotropic linear-viscoelastic materials in combined stress state. 2. Proportional deviators // Inter. Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, N8. – P. 648-660.

Романов Олександр Веніамінович, кандидат техн. наук
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
 e-mail: creep@innmeh.kiev.ua

ЩОДО ВПЛИВУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НА ДЕФОРМУВАННЯ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Романов О.В.

Розглядається процес склерономного й реономного деформування ізотропних конструкційних матеріалів в умовах складного напруженого стану з урахуванням його виду при простих і близьких до простих режимах навантаження [1].

$$\sigma_{ij}(\tau) = k(\tau)\sigma_{ij}(\tau_0); \quad k(\tau_0 = 0) = 1 \quad \tau \in (0, t), \quad (1)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $k(\tau)$ – функція, що задає режим навантаження.

Процес деформування в цих умовах здійснюється за прямолінійною траєкторією або траєкторією малої кривизни. У цьому випадку за міру накопиченої деформації можна прийняти інтенсивність деформації ε_i , залежність якої від інваріантів тензорів напружень у загальному випадку представляється у вигляді

$$\varepsilon_i(t) = f[J_1(T_\sigma(t)), J_2(D_\sigma(t)), J_3(D_\sigma(t))], \quad (2)$$

а її граничне значення ε_i^* можна розглядати як наявний запас пластичності матеріалу – Δ_p [2]. В (2) $J_1(T_\sigma(t))$ – перший інваріант тензора напружень, $J_2(D_\sigma(t))$, $J_3(D_\sigma(t))$ – відповідно другий і третій інваріанти девіатора напружень.

Вплив $J_1(T_\sigma)$ на процес накопичення деформації враховується за допомогою параметра жорсткості напруженого стану P_g [2], що в загальному випадку становить відношення гідростатичного компонента тензора напружень Γ до його девіаторної складової D

$$P_g = \Gamma/D. \quad (3)$$

Вплив $J_2(D_\sigma)$ на процес деформування досить добре досліджений і тому в даній роботі не розглядається. Треба, однак, відзначити, що врахування впливу тільки $J_2(D_\sigma)$, що базується на гіпотезі єдиної кривої деформування, як правило, приводить до істотних погрешностей в оцінці деформації, що вимагає врахування не тільки величини девіатора напружень, але і його форми, що характеризується третім інваріантом девіатора напружень $J_3(D_\sigma)$.

У роботі вплив $J_3(D_\sigma)$ ураховується за допомогою функції кута виду напруженого стану $\gamma(\psi_\sigma)$, у якій параметр кута виду напруженого стану ψ_σ [3] розглядається у вигляді

$$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{27J_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3}. \quad (4)$$

Визначення залежності функції $\gamma(\psi_\sigma)$ від ψ_σ здійснюється на основі базових експериментів на одновісний розтяг $\overline{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ й чисте кручення $\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$.

Показано, що врахування виду напруженого стану підвищує точність розрахунку.

1. Ильющин А.А. Пластичность / А.А. Ильющин. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. Пластичность и разрушение / [В.Л. Колмогоров, А.А. Богатов, Б.А. Мигачев, Е.Г. Зудов и др.]; за наук. ред. В.Л. Колмогорова. – Москва: Металлургия, 1977. – 336 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М: Машиностроение, 1975. – 400 с.

Савельєва Катерина Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, с.н.с. відділу реології,
 Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: katerina1971s@gmail.com;
 Дашко Ольга Геннадіївна, кандидат фіз.-мат. наук, с.н.с. відділу реології,
 Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: olga.dashko@gmail.com

ВЗАЄМОДІЯ ПЛОСКИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ. ВРАХУВАННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ТА КУБІЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Савельєва К.В., Дашко О.Г.

Теоретичне дослідження проводилося для матеріалу, нелінійні властивості якого моделюються пружним потенціалом Мурнагана, представленим у вигляді

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}\mu[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \\
 & + \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}A + B + \frac{1}{3}C\right)(u_{1,1})^3 + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{1,1}[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \\
 & + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + A + 2B)[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2]^2 + \\
 & + \frac{1}{8}(3A + 10B + 4C)(u_{1,1})^2[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2].
 \end{aligned} \quad (1)$$

У роботі [1] доведено, що такий запис дає можливість врахування не тільки традиційної квадратичної нелінійності визначальних співвідношень згідно [2], але також їх кубічну нелінійність.

Запис (1) передбачає залежність вектора переміщень тільки від одної просторової координати $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$, що є зручним для подальшого запису повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються у напрямі цієї координати. У представленому дослідженні розглядається випадок поширення тільки поздовжньої хвилі, тобто випадок відсутності початкового збудження поперечних хвиль. Далі було окремо проведено дослідження впливу квадратичної нелінійності на взаємодію поздовжніх хвиль, а також дослідження впливу на цю взаємодію кубічної нелінійності.

Аналіз рівнянь

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,xx} = N_1 u_{1,xx} u_{1,x},$$

для випадку врахування квадратичної нелінійності, та

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,xx} = N_3 u_{1,xx} (u_{1,x})^2,$$

при врахуванні окремо кубічної нелінійності, був проведений методом повільно змінних амплітуд. Одержано вкорочені рівняння та еволюційні рівняння за умови виконання резонансних умов частотного та хвильового синхронізму. Співвідношення Менлі-Рова разом з еволюційними рівняннями є базою для аналізу трьох-хвильової взаємодії для випадку квадратичної нелінійності та чотирьох-хвильової взаємодії при врахуванні кубічної нелінійності.

1. Гузь А.Н., Рушицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокмполитов. – Киев: Академперіодика, 2010. – 398 с.

2. Рушицкий Я. Я. Цурпал С. І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ.: Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.

Селіванов Михайло Федорович, провідний науковий співробітник, докт. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: mfs@ukr.net
 Чорноіван Юрій Олексійович, старший науковий співробітник, канд. фіз.-мат. наук,
Інститут механіки НАН України, Київ, Україна,
 e-mail: yurchor@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ МУЛЬТИЛІНІЙНОЇ КОГЕЗІЙНОЇ ЗОНИ ДО ЗАДАЧІ ПРО КРАЙОВУ ТРІЩИНУ В ІЗОТРОПНОМУ ТА ОРТОТРОПНОМУ ТІЛІ

Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.

Моделі когезійних зон широко використовуються для оцінки граничного руйнівного навантаження елементів конструкцій з тріщинами. Розглянуто деякі особливості моделей, пов'язаних із навантаженням на відмову та прогнозованим розміром когезійної зони. Для простоти розглянуто нормальний відрив для тріщини у нескінченній площині під дією симетричних розтягувальних напружень (Рис. 1, λ і β – вершини фізичної та фіктивної тріщин відповідно). Залежність між зчепленням і відривом вважається властивістю матеріалу і накладається у зоні перед фронтом тріщини. Умова плавного змикання берегів тріщини обчислювально задовольняється формулюванням модифікованих граничних умов [1, 2].

Критичний стан пластини з когезійною тріщиною проаналізовано за допомогою сингулярних інтегральних рівнянь. Запропоновано обчислювальну процедуру розв'язання отриманих систем інтегральних рівнянь та нерівностей. Представлений розв'язок демонструє дуже добру узгодженість із іншими опублікованими результатами для деяких граничних випадків (Рис. 2, залежність характеристичного множника від параметра ортотропії ρ , порівняння із роботою [3] (квадратики)). Таким чином, розроблена ефективна методологія для розв'язання задач механіки тріщин в рамках моделі когезійної зони. За допомогою цієї методології розв'язано деякі задачі, які ілюструють (i) вплив параметрів форми закону зчеплення-відриву на граничне навантаження при руйнуванні, (ii) можливість врахування контактних напружень у зоні контакту берегів тріщини, (iii) вплив усунення вимоги щодо плавності змикання берегів тріщини у постановці задачі [4], (iv) методологію розв'язування задачі для колінеарних тріщин.

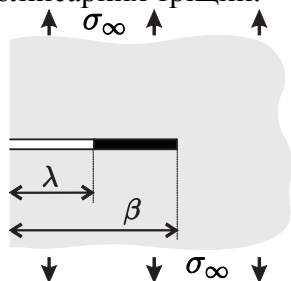


Рис. 1

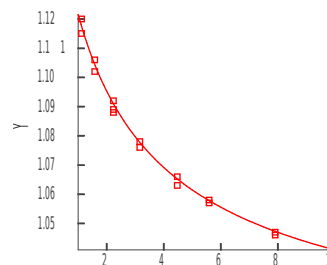


Рис. 2

1. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення // Доповіді НАН України. — 2019. — №3. — С. 46–54.
2. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення в ортотропному тілі // Доповіді НАН України. — 2019. — №6. — С. 25–35.
3. Sweeney J. The stress intensity for an edge crack in a semi-infinite orthotropic body // Int. J. Fract. — 1988, 37. — P. 233–241.
4. Селіванов М.Ф., Процан В.В. Вплив неврахування умови плавності змикання берегів тріщини при визначенні критичного навантаження // Доповіді НАНУ — 2020. — №3. — С. 28–35

Сенченков Ігор Костянтинович, доктор фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна, e-mail: term@inmech.kiev.ua
 Червінко Ольга Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна, e-mail: chop497@gmail.com
 Доля Олена Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний університет будівництва та архітектури, Київ, Україна e-mail: elena_367@ukr.net

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМО-НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ В ПРОЦЕСІ 3D-ДРУКУ

Сенченков І.К., Червінко О.П., Доля О.В.

В даній роботі на основі теорії термопружності розвинута модель термомеханічних процесів в елементах, що виготовляються методом 3D-друку. Модель заснована на теорії тіл, що ростуть [1], а чисельна реалізація моделі здійснюється методом скінченних елементів [2]. Досліджено термомеханічний стан конкретного нарощуваного пластинчастого елемента.

Математична постановка задачі включає універсальні балансові і кінематичні рівняння, а також специфічні визначальні рівняння нарощування матеріалу, які відповідають умовам на поверхні нарощування [1]

$$s_{ij} = 2G (e_{ij} - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_f (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta^*} - \varepsilon_{kk}^*).$$

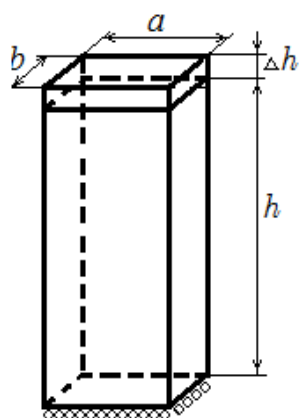
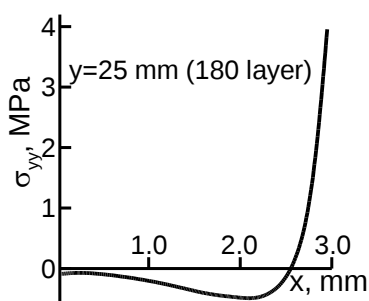
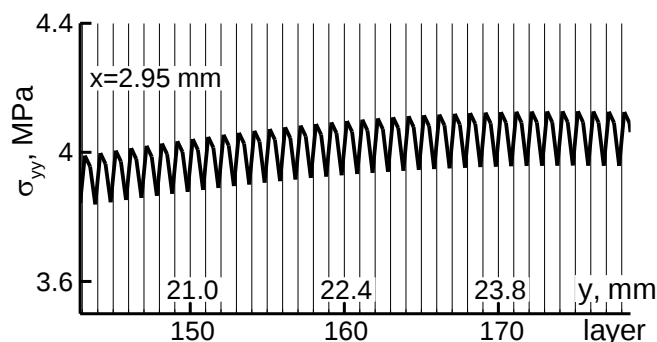


Рис.1

В постановці плоского напруженого стану розглянуто нарощування (druk) пластини з полімеру PLA розмірами $y=h=[0 \div 50 \text{ мм}]$, $0 < x < a$, $a=6 \text{ мм}$ шарами $\Delta h=0.14 \text{ мм}$ у кількості 360 шарів (рис. 1). Результати розрахунку залишкових напружень наведені на рис. 2 а, б.



а



б

Рис.2. σ_{yy} а – в перерізі $y=25 \text{ мм}$ (180-й шар), б – в перерізі $x=2,95 \text{ мм}$

Досліджено вплив товщини наплавлених шарів на залишкові напруження. Встановлено, що рівень напружень σ_{yy} зменшується із збільшенням товщини шару нарощування. Чим менше товщина нарощування, тим більше середній рівень напруження, при цьому коливання в границях нарощеного шару відрізняються несуттєво

1. Сенченков И.К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикл. Механика. — 2005. — 41№9. — С. 118 – 126.
2. Мотовиловец И.А., Козлов И.И. Механика связанных полей в материалах и элементах конструкций в 5-ти т.; Т.1. Термоупругость. — Киев Наук. Думка, 1987. — 264 с.

Середницька Христина Ігорівна, кандидат фіз.-мат. наук,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
 Україна;
 e-mail: ser.kristina@gmail.com

ПАРАМЕТР ТЕРМІЧНОЇ РЕКТИФІКАЦІЇ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ МІЖФАЗНИХ ЩІЛИН

У сучасній техніці виникає потреба ефективного охолодження електроніки. При з'єднанні різних матеріалів проявляється зміна ефективного контактного термоопору контактної пари при зміні напрямку теплового потоку на протилежний, так зване явище термічної ректифікації. Теоретично це можна пояснити тим, що теплові деформації зумовлюють зміну форми контактуючих поверхонь та фактичну площу контакту. Дана доповідь присвячена вивченню явища термічної ректифікації для біматеріалу з періодичною системою міжфазних щілин, заповнених газом, з урахуванням зміни термоопору та тиску заповнювача.

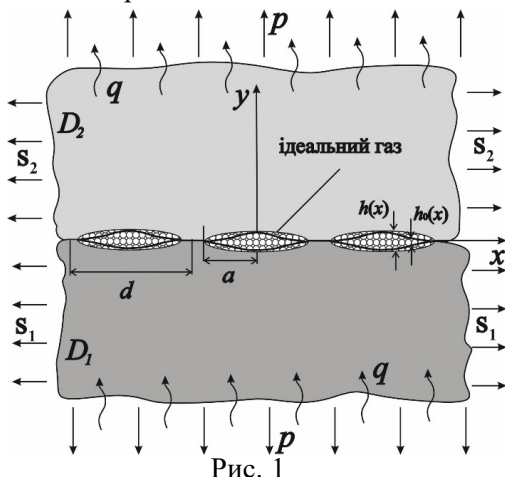


Рис. 1

Розглядаємо біматеріал, що складається з двох півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких наділені різними коефіцієнтами теплопровідності λ_1, λ_2 , лінійного теплового розширення α_1, α_2 , Пуассона ν_1, ν_2 та модулями зсуву G_1, G_2 . На лінії з'єднання півплощин розташована періодична система міжфазних щілин завдовжки $2a$ з початковою висотою $h_0(x)$ та періодом розташування d (рис.1). Порожнини щілин заповнені теплопровідним газом, який чинить тиск P_g на їх береги.

Коефіцієнт теплопровідності газу λ_g . На нескінченності у напрямку, перпендикулярному до міжфазної лінії, біматеріал підданий дії однорідних розтягувальних зусиль інтенсивності p і стаціонарного однорідного теплового потоку густини q . Вплив заповнювача на теплопередачу між берегами тріщини моделюємо змінним в процесі навантаження термоопором, а для визначення тиску газу використовуємо рівняння стану ідеального газу. Задачу термопружності за відомою методикою [1] зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Побудовано аналітично-числову ітераційну процедуру для розв'язування отриманої системи. На основі отриманого розв'язку задачі визначено ефективний термічний опір на міжфазній лінії біматеріалу, який є функцією теплового потоку і рівний похідній від усередненого стрибка температури по тепловому потоку. В залежності від напрямку теплового потоку спостерігається якісно різний розподіл ефективного термоопору, що і визначає явище термічної ректифікації в біматеріалі. Визначено параметр який встановлює кількісну характеристику зміни значень ефективного термоопору для двох протилежних напрямів потоків. Проаналізовано залежності параметра термічної ректифікації від термомеханічного навантаження, маси газу, коефіцієнта теплопровідності газу та щільності розміщення міжфазних щілин. Показано, що параметр термічної ректифікації є більшим у випадку неврахування тиску газу та за наявності на міжфазній лінії поодинокі щілини.

1. Мартиняк Р.М., Середницька Х.І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

Stone Howard Alvin, Fellow of the American Physical Society, a member of the National Academy of Sciences and the National Academy of Engineering, USA, Donald R. Dixon '69 and Elizabeth W. Dixon Professor and Chair in the Department Mechanical and Aerospace Engineering
Princeton University, Princeton, USA,
 e-mail: hastone@princeton.edu

SLAVA MELESHKO'S IMPACT ON FLUID MECHANICS AND MICROMIXING

Stone H.A.

In this talk I provide my perspectives on the research and scholarship of Slava Meleshko in fluid mechanics [1, 2, 3] and, in particular, in mixing flows at low Reynolds numbers [4, 5, 6, 7], i.e., micromixing.

I was fortunate when I was a new faculty member to learn about the research of Slava Meleshko, both in terms of the mathematical analyses of fluid dynamics problems of interest to me, but also in terms of the great depth with which he was familiar of the historical origins of the various problems, e.g. [1, 3]. This combination was inspirational to me. His humanity, broad intellect and cultural appreciation, spanning music and literature, also came across in our correspondence. In the talk, I will also attempt to give some insight into the challenges and (many) applications micromixing [6] and related flow problems [7], using some of the insights of Slava Meleshko, while also touching on some new research questions.

1. Meleshko V. V. A bibliography of vortex dynamics 1858-1956. / V.V. Meleshko, H. Aref// *Adv. Appl. Mech.* – 2007. – **41**. – P.197-292.
2. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity./ V.V. Meleshko // *Proc. R. Soc. London.* – 1996. – **A452**. – P. 1999–2022
3. Meleshko V. V. Biharmonic problem in a rectangle./ V. V. Meleshko // Symposium in Honor of Leen van Wijngaarden on In Fascination of Fluid Dynamics, NETHERLANDS – 1997
4. Meleshko V. V. Three-dimensional mixing in Stokes flow: the partitioned pipe mixer problem revisited. / V.V. Meleshko, O.S. Galaktionov, G.W.M. Peters, H.\,E.\,H. Meijer// *Eur. J. Mech. B/Fluids.* – 1999. – **18**. – P. 783-792.
3. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a finite cylinder. / V.V. Meleshko, V.S. Malyuga, A. M. Gomolko // *Proc. R. Soc. London.* – 2000. –**A456**. – P. 1741-1758.
4. Krasnopolskaya T.S. Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity. / T.S. Krasnopolskaya, V.V. Meleshko, G.W.M. Peters, H.E.H. Meijer// *Eur. J. Mech. B/Fluids.* – 1999. – **18**. – P. 793-822.
5. Malyuga V.S. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. / V.S. Malyuga, V.V. Meleshko, M.F.M. Speetjens, H.J.H. Clercx, G.J.F. van Heijst. // *Proc. R. Soc. London.* –2002. – **A458**. –P. 1867-1885.
6. Stroock A. D. Chaotic mixer for microchannels. / A. D. Stroock, S. K.W. Dertinger, A. Ajdari, I. Mezić, H.A. Stone, G.M. Whitesides // *Science.* – 2002. – **295**. – P. 647–651.
7. Stone H. A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip. / H.A.Stone, A.D. Stroock, A. Ajdari // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2004. – **36**. – P. 381–411.

Timokha, Alexander N., Academician of NAS of Ukraine,
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
 e-mail: atimokha@gmail.com

MATHEMATICS OF EXOTIC SLOSHING PHENOMENA

Timokha A.N.

Talking on sloshing centres around a free-boundary problem in a spatially-limited domain whose mathematical formulation was stated by A.-L. Cauchy, S.-D. Poisson and M. Ostrogradsky who pursued describing the gravity surface waves on the boundary of an incompressible ideal liquid with irrotational flows [1]. This mathematical formulation remains dominating in analytical studies of nonlinear surface-wave resonant phenomena [2] when the primary excited natural sloshing modes, whose concept is a product of the inviscid irrotational flows idealisation, play the key role. This is true even for the moonpool problem [3] when the viscous flow separation seriously contributes damping. After recalling the mathematical formulation, the talk focuses on:

- the secondary resonance phenomenon for shallow-water sloshing [2, ch. 8] and sloshing in the screen-equipped tanks [4];
- the azimuthal liquid mass-transport [5] during the swirl-type resonant nonlinear sloshing for the arbitrary three-dimensional non-parametric tank forcing [6,7];
- vibroequilibria [8], which are experimentally supported by experiments [9].

1. Craik A.D.D. The origins of water wave theory / A.D.D. Craik // *Annual Review of Fluid Mechanics*.— 2004.—**36**.—P. 1-28.

2. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Sloshing / O.M. Faltinsen // Cambridge University Press, 2009.— 608 pp.

3. Faltinsen O.M., Timokha A.N. On damping of two-dimensional piston-mode sloshing in a rectangular moonpool under forced heave motions / O.M. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*.— 2015.—**772**, R1.

4. Faltinsen O.M., Firoozkoobi R., Timokha A.N. Effect of central slotted screen with a high solidity ratio on the secondary resonance phenomenon for liquid sloshing in a rectangular tank / O.M. Faltinsen // *Physics of Fluids*.— **23**, Issue 6.—Art. No 062106.— P. 1-13.

5. Faltinsen O.M., Timokha A.N. An inviscid analysis of the Prandtl azimuthal mass-transport during swirl-type sloshing / O.M. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*.— 2019.— **865**.— P. 884-903.

6. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Sloshing in upright circular container: Theory, analytical solutions and applications / I.A. Raynovskyy // CRC Press/Taylor & Francis Group, 2021.— 170 pp.

7. Faltinsen O.M., Lagodzinskiy O., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric tank forcing / O.M. Faltinsen // *Journal of Fluid Mechanics*.— 2020.— 894, A 10.— P. 1-42.

8. Gavriluk I., Lukovsky I., Timokha A. Two-dimensional variational vibroequilibria and Faraday's drops / I Gavriluk // *ZAMP*.— 2004.—**55**.—P. 1015-1033.

9. Porter J., Sánchez P.S., Shevtsova V., Yasnou V. A review of fluid instabilities and control strategies with applications in microgravity / J. Porter // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*.—2021.—**16**, Art. No. 24.—P. 1-35.

Токовий Юрій Владиславович, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
 e-mail: tokovyy@gmail.com
 Бойко Дмитро Сергійович,
 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
 e-mail: dmytroboikoukr@gmail.com

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Токовий Ю.В., Бойко Д.С.

Вивчення локальних ефектів від місцевого силового навантаження межі пружних деформівних тіл часто здійснюють з використанням моделі напівобмеженого тіла, наприклад, півпростору (чи півплощини – у випадку застосування однієї з плоских гіпотез). При цьому аналіз розв'язків передбачає певну асимптотику компонентів тензора напружень, які з віддаленням від навантаженої ділянки межі повинні згасати (у випадку самозрівноваженого навантаження), або прямувати до сталих значень, які відповідають головним вектору та моменту прикладених до межі сил [1]. Забезпечення такої асимптотики передбачає побудову певного типу власних значень та функцій відповідних ключових рівнянь задачі [2].

Побудова асимптотично вмотивованих власних функцій задач теорії пружності та термопружності для напівобмежених тіл визначається типом та кратністю відповідних власних чисел, що у свою чергу залежить від співвідношень між коефіцієнтами ключових рівнянь задачі. Якщо у випадку ізотропного матеріалу такі співвідношення є чітко окресленими для будь-яких значень пружних модулів, то за врахування просторової анізотропії, зокрема у випадку трансверсально ізотропного матеріалу, різні значення анізотропних характеристик матеріалу спричиняють суттєві відмінності між власними значеннями та функціями для різних матеріалів такого класу. Це суттєво ускладнює побудову універсальної форми розв'язку, яка забезпечувала б потрібну асимптотику з віддаленням від межі досліджуваного тіла [3].

У доповіді наведено підхід на основі методу безпосереднього інтегрування, згідно з яким тривимірні задачі теорії пружності та термопружності для трансверсально ізотропного півпростору за локального силового та теплового навантаження його межі зведено до ключового інтегрального рівняння другого роду для однієї з компонент тензора напружень з відповідними крайовими умовами. З використанням методу резольвентного ядра побудовано явний розв'язок отриманого ключового рівняння, форма якого є незмінною для усіх фізично допустимих співвідношень між пружними модулями трансверсально ізотропного матеріалу.

1. *Rychahivskyy A.V., Tokovyy Yu.V.* Correct analytical solutions to the thermoelasticity problems in a semi-plane // *J. Thermal Stresses*. – 2008. – **31**. – P. 1125–1145.
2. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 329 p.
3. *Boiko D.S., Tokovyy Y.V., Gao C.F.* Three-dimensional thermal-stress analysis of semi-infinite transversely isotropic composites // *Trans. Nanjing Univ. Aeronautics Astronautics*. – 2021. – **38**. – P. 18-28.

Троценко Ярослав Павлович, доктор філософії в галузі математики та статистики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

ТЕЧІЯ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ З ДІАФРАГМАМИ ПРЯМОКУТНОГО ПРОФІЛЮ

Троценко Я.П.

Через складну геометрію нерегулярних каналів течія в них може бути нестационарною, що при певних умовах призводить до виникнення автоколивань середовища і, як наслідок, до появи тонального звуку. Дослідження проблеми генерації автоколивань у течіях має практичний інтерес у різноманітних галузях науки і техніки. З одного боку, детальне вивчення подібних процесів дозволяє застосовувати більш ефективні заходи для уникнення небажаних акустичних коливань [1]. З іншого боку, ретельний опис механізмів генерації шумів респіраторного тракту та кровоносних судин людини може стати основою для створення нового покоління неінвазивних діагностичних засобів [2].

У даній роботі досліджується течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами прямокутного профілю (рис.). Вважається, що поверхні каналу та діафрагм нерухомі й абсолютно жорсткі. Течія розглядається при швидкостях значно менших за швидкість звуку в середовищі. Також припускається, що рух рідини в області між діафрагмами є близьким до осесиметричного.

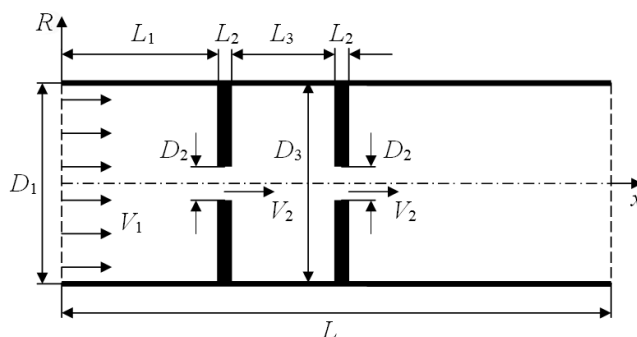


Рис. Геометрія каналу з діафрагмами.

Задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини. Розв'язання проводиться чисельно за методом скінченних об'ємів з використанням різницевої схеми другого порядку точності. У роботі [3] було показано, що течія рідини в циліндричному каналі з двома діафрагмами округлого профілю в певному діапазоні чисел Рейнольдса характеризується наявністю нестійкого зсувного шару, у якому утворюється послідовний ряд вихорів, що викликають автоколивання полів швидкості й тиску в околі отвору другої діафрагми. Ці коливання можуть бути джерелом звуку та дають змогу оцінити його частоту.

Метою даної роботи є визначення впливу зміни профілю діафрагм з округлого на прямокутний на структуру потоку в області між діафрагмами та характеристики автоколивальних процесів в залежності від швидкості течії.

1. Ziada S. Flow-excited acoustic resonance excitation mechanism, design guidelines and counter measures / S. Ziada, P. Lafon // Appl. Mech. Rev. – 2014. – **66** (1). – P. 010802.
2. Вовк И.В. Акустика дыхания и сердечной деятельности / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко, А.П. Макаренков // Акуст. вісн. – 2011. – **14**, №1. – С. 3–19.
3. Vovk I.V. Excitation of self-sustained oscillations by a flow of liquid in a cylindrical duct with two diaphragms / I.V. Vovk, V.T. Matsypura, Ya.P. Trotsenko // J. Math. Sci. – 2020. – **247** (2). – P. 258–275.

Борисейко Олександр Віталійович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: b12313@ukr.net;

Улітко Ігор Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua;

Яксон Єлизавета Андріївна, студентка 2 курсу магістратури,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: yaksonlizka@gmail.com

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ГІРОСКОПІЧНОГО СЕНСОРА НА ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЯХ ЗСУВУ

Улітко І.А., Борисейко О.В., Яксон Є.А.

Розглядається математична модель сенсорного елемента п'єзоелектричного твердотільного гіроскопа на об'ємних хвилях зсуву, що ґрунтується на властивостях Коріолісової дисперсії гармонічних хвиль в пружному тілі [1] та на властивостях п'єзоефекту в шарі з поздовжньою поляризацією [2]. Передбачається, що вісь обертання шару є перпендикулярною до його плоских електродованих лицевих граней, на які подається однорідне за координатами серединної площини, збуджуюче електричне поле. Важливим чинником в такій постановці, обумовлений вибором первинної моди гіроскопа, є наявність статичних напружень зсуву у напрямку осі поляризації п'єзокераміки, пропорційних амплітуді прикладеного електричного поля, що діють навіть у випадку відсутності резонансних коливань.

У доповіді буде показано, що переміщення та напруження вторинної сенсорної моди гіроскопа при малих кутових швидкостях обертання характеризуються суперпозицією дисперсійних за Коріолісом зсувних хвиль, що пропорційна першому ступеню малості кутової швидкості, а переміщення та напруження первинної збуджуючої моди гіроскопа зазнають впливу, пропорційного другому ступеню малості кутової швидкості обертання.

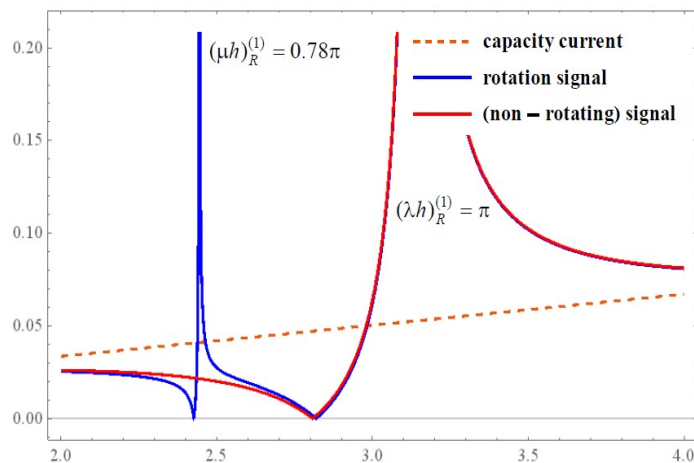


Рис.1

Вираз для функції струму провідності у зовнішньому електричному колі та розрахункова амплітудно-частотна характеристика на первинній та вторинній модах (Рис.1) демонструють задовільні для практики параметри гіроскопічного сенсора. Так, на першому основному резонансі частота сенсорної моди складає 0.78 від збуджуваної частоти, ефективність збуджуваної моди (динамічний КЕМЗ за Мезоном) складає близько 24 відсотків, а ефективність сенсорної моди – 1.5 відсотки при значенні нормованої кутової швидкості рівному 0.01.

1. Улітко І.А. Дисперсия плоских гармонических волн в равномерно вращающемся упругом пространстве / И.А. Улітко // ДАН Украины. – 1995. – № 1. – С. 54–57.

2. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. / [Отв.ред. А.Н. Гузь]. – Київ: Наук. думка, 1989. – Т.5: Электроупругость / В.Т. Гринченко, А. Ф. Улітко, Н. А. Шульга. – 280 с.

Улітко Ігор Андрійович, кандидат фіз.-мат. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: ulitko@univ.kiev.ua;

Курилко Олександр Борисович, кандидат фіз.-мат. наук,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com;

Затхей Марія Богданівна, студентка 2 курсу магістратури,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: mary.zathey@gmail.com

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ПЕРВИННОЇ МОДИ ТВЕРДОТІЛЬНОГО ГІРОСКОПУ КАМЕРТОННОГО ТИПУ

Улітко І.А., Курилко О.Б., Затхей М.Б.

Використання камертонного резонатора як чутливого елемента гіроскопічного сенсора має певні переваги у порівнянні з іншими типами резонаторів, оскільки дозволяє компенсувати бічні прискорення, перпендикулярні до осі обертання. На практиці застосовуються як високочастотні п'єзокварцеві резонатори, так і низькочастотні резонатори з п'єзокераміки, танталату або ніобату літію. Завдання точного визначення параметрів первинної моди нерухомого камертонного перетворювача має принципово важливе значення. Так, у роботі [1] аналіз сенсорного сигналу камертонного гіроскопа з біморфними п'єзоелементами побудовано на розрахунку першої частоти згинних коливань нерухомої балки з одним жорстко закріпленим кінцем за С.П.Тимошенком [2]. В результаті, частоти Браянівської пари розщеплення в [1] лежать нижче від частоти балки Тимошенка, а резонансна частота нерухомого камертона, навколо якої і відбувається розщеплення частот, залишилася невизначеною. Тому метою виконаного дослідження, серед іншого, було встановити саме цю частоту.

При постановці задачі, враховуючи реальні геометричні розміри камертонних елементів, вважаємо, що довжина стержнів камертона l набагато перевищує радіус кривизни основи r – пружного напівкільця: $r/l \ll 1$. Тоді власні частоти згинних коливань напівкільця лежать набагато вище від частот згинних коливань стержнів, що дозволяє подати розв'язок для основи у квазі-статичному наближенні, а динаміку камертонного гіроскопа враховувати розв'язками для біморфних п'єзокерамічних стержнів. При цьому умови спряження між стержнями та напівкільцем зводяться до умов пружного закріплення стержнів, які й враховують геометричні параметри r та l .

Так, резонансний визначник первинної моди камертона можна із задовільною точністю подати за першим ступенем малості відношення r/l у вигляді

$$\Delta(\lambda l) = \underbrace{1 + \operatorname{ch}(\lambda l) \cos(\lambda l)}_{\Delta_0^T} - \left(\frac{r}{l}\right) \frac{\pi}{4} (\lambda l) \left\{ \operatorname{ch}(\lambda l) [\sin(\lambda l) + \operatorname{sh}(\lambda l)] - \operatorname{sh}(\lambda l) [\cos(\lambda l) + \operatorname{ch}(\lambda l)] \right\}$$

де Δ_0^T – резонансний визначник Тимошенка. З рівняння $\Delta(\lambda l) = 0$ при $r/l = 0.1$ для частоти першого резонансу нерухомого камертона маємо значення $(\lambda l)_1 = 1.750$, що лежить нижче від частоти балки Тимошенка, $\Delta_0^T = 0$: $(\lambda l)_1^T = 1.875$ [2], але в точності співпадає з середнім арифметичним частот $(\lambda l)_1^-$ та $(\lambda l)_1^+$ Браянівської пари розщеплення камертонного гіроскопа [1].

1. Ulitko I.A. Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope / I.A. Ulitko // 1995 IEEE Int. Frequency Control Symposium, San Francisco, USA: proceedings. – 1995. – P. 786–793.

2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П.Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. – Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.

Fallah Arash S., PhD (Eng.), Prof. of Applied Mechanics (DIC, MAIAA, MRAeS, MCMSE, FHEA)
Oslo Metropolitan University, Norway,

e-mail: arashsol@oslomet.no;

Gorshkov Vyacheslav, PhD (Phys.), Dr. Sci. (Phys.), Prof. of Solid-State Physics
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute",

e-mail: vn.gorshkov@gmail.com;

Navadeh Navid, MSc (Eng.), PhD student
Imperial College London, London, United Kingdom,

e-mail: n.navadeh09@imperial.ac.uk;

Tereshchuk Volodymyr, MSc (Phys.), PhD student
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute",

e-mail: volodymyr379@gmail.com.

WAVE PROPAGATION IN PSEUDO-FRACTAL HYPER-LATTICES

Fallah A.S., Gorshkov V.N., Navadeh N., Tereshchuk V.V.

Pseudo-fractal and fractal microstructures are promising in increasing the range of detectable frequencies for devices used in the realm of electromagnetism. Due to the similarity between mechanical and electrical systems, it is conjectured the introduction of these microstructures could provide flexible solutions capable of closing/widening phononic bandgaps and increasing tailorability in mechanical metamaterials and lattices. Pseudo-fractal hyper-lattices are considered in this work and different aspects of dispersion surface morphology and frequency band structure have been studied. It has been observed that higher frequencies that can be excited in the simple square lattices are almost the same as those in the pseudo-fractal structures, however; through introduction of higher levels of fractals, the pseudo-fractal hyper-lattice presents new features not observable in conventional lattices or simple phononic metamaterials. By increasing the order of pseudo-fractal microstructure dispersion surfaces morphologies change thus frequency gaps are eliminated. This phenomenon can be of advantage for acoustic/phononic visibility/detectability e.g. in designing sensors when a selective range of frequencies must lie within the passband. In the classical analogy to quantum level repulsion, dispersion surfaces flatten which sufficiently decreases the sound group velocity in the pseudo-fractal structure, a feature which can be used for numerous practical application.

GertJan F. van Heijst
 Eindhoven University of Technology, The Netherlands
 e-mail: g.j.f.v.heijst@tue.nl

SLAVA MELESHKO'S CONTRIBUTIONS TO FLUID MECHANICS

GertJan van Heijst

Although originally trained in solid mechanics (in particular in elasticity problems), Slava Meleshko has made quite a number of remarkable and original scientific contributions to fluid mechanics. We should mention in particular his work on vortex dynamics, chaotic mixing, and Stokes flows. The latter was crucially inspired by Meleshko's profound expertise and knowledge of elasticity problems, as viscously-dominated flows are also governed by the biharmonic equation. As it is impossible to give a full overview of his work on fluid-dynamical topics in a short time frame, in this lecture I will confine myself to only a few topics, in which I was involved myself, during a longstanding and fruitful collaboration with Slava Meleshko.

One of the topics that will be discussed concerns the analysis of early work by Sergey A. Chaplygin on an elliptical vortex in a shear flow, and on a dipolar vortex structure travelling at a constant speed in an otherwise quiescent fluid. The second topic concerns the interaction of vortex structures: this collaboration nicely showed the ability of point-vortex models to describe the interaction of (two-dimensional) vortex structures, such as a dipole colliding at a monopolar vortex. Thirdly, I will discuss our joint work (with Shura Gourjii and Luca Zannetti) on the behaviour of a vortex structure in close proximity of a solid obstacle, in particular focussing on the behaviour of a vortex dipole near a sharp-edged plate.

These three topics in vortex dynamics mainly serve to illustrate the scientific background and interests of Slava Meleshko: history, fundamental issues, and elegant mathematical analysis.

1. V.V. Meleshko, G.J.F. van Heijst- On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.***272**, 157–182 (1994)
2. V.V. Meleshko, G.J.F. van Heijst - Interacting two-dimensional vortex structures: Point vortices, contour kinematics and stirring properties. *Chaos, Solitons & Fractals***4**. 977–1010 (1994)

Хорошев Костянтин Григорович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна,
 e-mail: khroshev.kostiantyn@lil.kpi.ua
 Кикоть Сергій В'ячеславович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
 Національний транспортний університет, Київ, Україна,
 e-mail: kykot@ntu.edu.ua

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ТА ВЛАСНИХ ФОРМ РЕГУЛЯРНИХ ЛАНЦЮГОВИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Хорошев К.Г., Кикоть С.В.

Класична задача визначення власних коливань регулярної ланцюгової коливальної системи є задача поперечних коливань скінченої кількості намистинок, нанизаних на однакових відстанях та достатньо натягнуту нитку з жорстко закріпленими кінцями [1]. Знайдені аналітичні вирази для власних частот та власних форм шляхом прямого розв'язання алгебраїчних рівнянь відносно амплітудних коефіцієнтів. При цьому умови жорсткого закріплення кінців нитки сприймалися як граничні умови. В роботах [2,3] схожа схема розв'язання використана для дослідження власних коливань регулярних ланцюгових систем з одним вільним кінцем.

Класичним підходом при дослідженні власних коливань дискретних механічних систем є виділення та розв'язання вікового рівняння для знаходження власних частот. В роботі [4] для нитки з бусинками було отримано вікове рівняння у вигляді визначника n -го порядку

$$\begin{vmatrix} 2-k^2/b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2-k^2/b & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2-k^2/b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-k^2/b \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

та рекурентні співвідношення його розгортання, що дозволило авторам отримати формули знаходження власних частот k та амплітудних коефіцієнтів власних форм.

Очевидно, що вікове рівняння (1) має місце для будь-якої регулярної ланцюгової системи з жорстко закріпленими кінцями, де параметр b залежить від інерційних та пружних властивостей ланки системи. Звільнення одного з кінців (або обох) змінює $(1,1)$ - чи (n,n) -елемент (або обидва) визначника (1), що суттєво впливає на рекурентні співвідношення його розгортання. В даній доповіді показано, як маючи рекурентні співвідношення для вікового рівняння (1), можна визначити власні частоти та форми регулярних ланцюгових коливальних систем з одним чи обома вільними кінцями.

1. Гантмахер Ф. Р. Оцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. – Москва: Гостехиздат, 1950. – 359 с.

2. Thomson W. T. Theory of Vibrations with Applications, 5th Edition / W. T. Thomson, M. D. Dahleh. – London: Pearson education, 1998. – 544 с.

3. Géradin M. Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics. 3rd edition / M. Géradin, D. Rixen. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2015. – 598 p.

4. Бабаков И. М. Теория колебаний: учебное пособие: [изд. 4-е, исправл.] / И. М. Бабаков. – Москва: Дрофа, 2004. – 591 с.

Shvets Aleksandr Yu., Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.,
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute”,
 e-mail: aleksandrshvetskpi@gmail.com;

Donetskyi Serhii V., Phd. student, faculty of physics and mathematics,
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute”,
 e-mail: dsvshka@gmail.com

GENERALIZATION OF THE CONCEPT OF ATTRACTORS IN NONIDEAL PENDULUM SYSTEMS

Shvets A.Yu., Donetskyi S.V.

The most complete information about steady-state dynamic behavior of a real physical system can be obtained by constructing attractors of this system. Over last decade, the classification of attractors of dynamic systems has significantly expanded. A number of concepts have been introduced that clarify properties of certain attractors. This is how rare, hidden, maximal attractors etc. were defined. In this paper nonideal, by Sommerfeld–Kononenko, pendulum systems are considered. Mathematical models of such nonideal systems are derived in the monograph [1]. For such systems, the so-called maximal attractors are constructed and studied in details. These attractors are natural generalization of classical concept of attractor. A family of equilibrium positions has been found, each of which is not attractor in traditional sense of this term. Limit sets in the form of family of cycles, each of which is not limit cycle, were constructed. Several types of generalized chaotic attractors have also been found.

Scenarios of transitions from regular steady-state regimes to chaotic ones, as well as transitions of the "chaos - chaos" type are studied. Despite the fact that the studied limit sets are not attractors in the traditional sense, the known scenarios of transition to chaos by Feigenbaum and Manneville–Pomeau are realized for them as well. It should be emphasized that a relatively new scenario of generalized intermittency also holds for such generalized attractors.

1. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation. – Institute of Computer Research, R&C Dynamics, M. – I., 2008. – 280 p.

Юзв'як Микола Йосипович¹,

e-mail: yuzvyaky@ukr.net

Токовий Юрій Владиславович¹, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,

e-mail: tokovyy@gmail.com

Ясінський Анатолій Васильович¹, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,

¹*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,*

e-mail: tokovyy@gmail.com

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН СКІНЧЕННОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В., Ясінський А.В.

Осесиметричні задачі теорії пружності та термopужності для суцільних та порожнистих циліндрів скінченної довжини можна без перебільшення віднести до класичних задач механіки деформівного твердого тіла [1]. Незважаючи на довготривалу історію їх дослідження та відносну простоту форми циліндричних тіл, що обмежені поверхнями, паралельними до координатних поверхонь циліндричної системи координат, задачі такого класу становлять певну складність для застосування аналітичних методів розв'язування, зокрема щодо задоволення усіх межових умов на ортогональних сімействах межових поверхонь, зокрема, в кутових точках. У багатьох випадках цю проблему можна вирішити, застосувавши чисельні або наближені методи (певним чином «згладивши» ребра циліндра шляхом реалізації варіаційних формулювань). Однак використання таких розв'язків для якісного аналізу полів напружень та деформацій у деяких випадках є недостатнім. Якщо, наприклад, реалізація широко вживаного методу скінчених елементів для певних геометрій пружних циліндрів пов'язана з дуже великою кількістю рівнянь, то ефективне використання навіть сучасних обчислювальних засобів вимагає своєрідного сегментування обчислювальних потоків, а відтак – розділення вихідних задач підзадачі для репрезентативних циліндричних сегментів. Це у свою чергу викликає нові ускладнення, пов'язані з адекватним формулюванням крайових умов для циліндричних сегментів, які б компенсували дію відкинутої частини циліндра, а тому є дещо відмінними від загальних умов термомеханічного спряження. Для того, щоб сформулювати такі умови зручно скористатися якісними залежностями шуканих величин (напружень чи переміщень) від силових чи теплових факторів навантажень вихідного циліндра.

У роботі наведено аналітично-числову методику визначення термонапружень у порожнистому циліндрі скінченної довжини за стаціонарного теплового навантаження. З використанням методу безпосереднього інтегрування сформульовану задачу термopужності зведено до розв'язання ключових рівнянь для уведеної визначальної функції, а усі компоненти тензора напружень виражено через цю функцію з використанням рівнянь рівноваги. Розроблений алгоритм дає змогу точно задовольнити граничні умови, включаючи кутові точки циліндра.

1. *Meleshko V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // J. Eng. Math. – 2003. – 46, No. 3/4. – P. 355–376.*

Яковенко Ніна Дмитрівна, канд. фіз.-мат. наук, мол. наук. співр., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна, e-mail: Oksenchuk_ND@ukr.net
 Червінко Ольга Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна, e-mail: chop497@gmail.com
 Якименко Сергій Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Центральнотехнічний національний університет, Кіровоград, Україна e-mail: yasm@i.ua

ПОРІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО І НЕЛІНІЙНОГО ПРАВИЛ СУМІШЕЙ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ НЕПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БАГАТОФАЗНИХ МАТЕРІАЛІВ У ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ

Яковенко Н.Д., Червінко О.П., Якименко С.М.

Для врахування впливу поточного фазового складу на непружні характеристики матеріалу в роботі [1] для визначення коефіцієнтів моделі течії було використано лінійне правило сумішей (ЛПС) $\bar{P} = (1 - C_2)P_1 + C_2P_2$, де P_1, P_2 – параметри моделі для компонентів

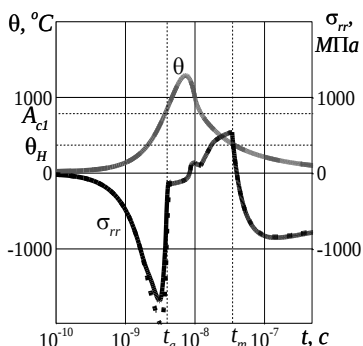


Рис.1

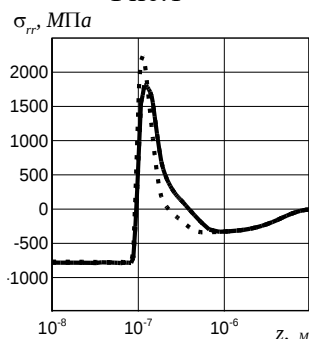


Рис.2

фаз 1 (аустеніт) і 2 (мартенсит), які мають концентрації C_1, C_2 , $C_1 + C_2 = 1$. Для оцінки чутливості результатів моделювання нестационарних процесів до цієї конститутивної гіпотези в даній роботі проведено порівняльний аналіз результатів моделювання, отриманих з використанням лінійного і нелінійного правил сумішей (НПС) [2] $\bar{P} = (1 - C_2^N)P_1 + C_2^N P_2$ при $N = 2$.

Розглядається динамічна задача для півпростору $z \geq 0$ із сталі 35ХМА при імпульсному термічному навантаженні тепловим потоком на поверхні $z = 0$, $r > 0$

$$q_s = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0 \text{ при } t = 0.$$

В розрахунках приймалось $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ квт/м}^2$, $t_q = 10^{-8} \text{ с}$.

На рис. 1 показана зміна за часом температури та компоненти напруження σ_{rr} на поверхні $z = 0$, а на рис. 2 – залишковий розподіл σ_{rr} вглиб півпростору. Штриховими лініями показані результати розрахунку за ЛПС, а суцільними – за НПС. Температури початку аустенізації та мартенситного перетворення позначені як A_{c1} та θ_H . В момент початку аустенізації

$t_a = 0,37 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ рівень напружень, розрахований за ЛПС дещо вищий за рівень напружень за НПС. Протягом інших проміжків часу розбіжність не суттєва. В залишковому розподілі (рис. 2) ЛПС дає завищене значення максимальних розтягувальних напружень в околі «зуба» і не впливає на стискальні напруження в мартенситному шарі.

Таким чином, при $N > 1$ в рівнянні НПС лінійне правило сумішей дає задовільну оцінку зверху максимальних поточних і залишкових напружень для даного класу задач.

1. Senchenkov I.K. Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties of microstructure of a material / I.K.Senchenkov, N.D.Oksenchuk // J. Math.Sci. – 2013. – 190, N. 6 – P. 796-803.
2. Bonquered I.K. et al. Microstructure based model for the static mechanical behavior of multiphase steel / I.K.Bonquered // Acta Materialia, 2006. – 54, N 46. P. 1143-1156.